BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Fungsi

Definisi A.1

Diberikan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan atau mengaitkan setiap elemen dari himpunan A dengan tepat satu elemen dari himpunan B disebut dengan suatu fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B. Apabila cara atau aturan yang mengaitkan tersebut diberi simbol f, maka dikatakan bahwa f adalah suatu fungsi dari A ke B dan dilambangkan sebagai:

$$f : A \to B \text{ atau } A \xrightarrow{f} B$$

Himpunan A disebut sebagai daerah asal (*domain)* dari f dan himpunan B disebut sebagai daerah kawan (*codomain*) dari fungsi f. Daerah hasil dari fungsi $f : A \to B$ disebut *range*.

$f : A \to B$ dikatakan fungsi jika a = b maka f (a) = f (b) equivalen dengan jika f (a) $\neq$ f (b) maka a $\neq$ b, $\forall$a,b $\in$ A.

Misalkan diberikan fungsi $f : A \to B$

1. Fungsi f disebut injektif jika a $\neq$ b maka f (a) $\neq$ f (b),
   equivalen dengan:
   jika f (a) = f (b) maka a = b, untuk setiap a,b $\in$ A.
2. Fungsi f disebut surjektif jika untuk setiap b $\in$ B dengan ada a $\in$ A, sehingga f (a) = b atau Image (f) = B

3. Fungsi f disebut bijektif jika f merupakan fungsi injektif dan surjektif

Contoh A.1

Diberikan dua himpunan tak kosong S dan T yang merupakan himpunan bilangan real, dimana S = T. Diberikan juga suatu fungsi ϕ : S $\rightarrow$ T dan didefinisikan $\phi(s) = s^2$, $\forall s \in$ S. Selidiki apakah fungsi ϕ merupakan fungsi injektif atau surjektif?

Jawab:

- ϕ merupakan fungsi injektif jika $s_1 \neq s_2$ maka $\phi\ (s_1) \neq \phi\ (s_2)$ equivalen dengan jika $\phi\ (s_1) = \phi\ (s_2)$ maka $s_1 = s_2$,$\forall\ s_1, s_2 \in$ S

  Jika diambil –1,1 $\in$ S maka ϕ (–1) = ϕ (1) = 1

  $$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \in \text{S maka } \phi\left(-\frac{1}{2}\right) = \phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

  Sehingga $\exists\ s_1, s_2 \in$ S dengan $s_1 \neq s_2$ tetapi $\phi\ (s_1) = \phi\ (s_2)$, maka ϕ bukan merupakan fungsi injektif
- ϕ merupakan fungsi surjektif jika $\forall\ s_2 \in$ T dengan $\exists\ s_1 \in$ S, sehingga $\phi\ (s_1) = s_2$ atau Image (ϕ) = T.

  Dari $\phi(s) = s^2$, $\forall s \in$ S, maka daerah hasil dari ϕ adalah himpunan semua bilangan real positif sehingga $\phi\ (s_1) \neq s_2$ atau

  range (ϕ) $\neq$ T maka ϕ bukan merupakan fungsi surjektif.

Jadi ϕ : S $\rightarrow$ T bukan fungsi injektif dan surjektif.

B. Grup

1. Pengertian Grup

Definisi II.B.1

Suatu grup (G, ∘) adalah suatu himpunan G dengan suatu operasi biner "∘" yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) G *tertutup* terhadap operasi " ∘ " yaitu a ∘ b ∈ G ∀a,b ∈ G maka (G, ∘) disebut grupoid.

(ii) Operasi " ∘ " bersifat *asosiatif* yaitu (a ∘ b) ∘ c = a ∘ (b ∘ c) ∀a,b,c ∈ G. Grupoid yang memenuhi sifat asosiatif disebut semigrup.

(iii) Ada *elemen identitas* e ∈ G sedemikian hingga e ∘ a = a ∘ e = a, ∀a ∈ G. Semigrup yang memiliki elemen identitas disebut monoid.

(iv) Setiap elemen a ∈ G mempunyai *elemen invers* a^{-1} ∈ G, sedemikian hingga $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$. Monoid yang setiap elemen mempunyai invers disebut dengan grup.

Jika memenuhi sifat komutatif, yaitu a ∘ b = b ∘ a ∀a,b ∈ G, grup tersebut disebut komutatif.

Contoh II.B.1

Selidiki apakah himpunan bilangan bulat Z terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif?

Jawab:

Himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dinotasikan dengan (Z,+). Untuk menyelidiki (Z,+) merupakan grup maka:

(i) $\forall\, a, b \in$ Z, $a + b \in$ Z memenuhi sifat tertutup maka (Z,+) grupoid.

(ii) $\forall\, a, b, c \in$ Z, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$ memenuhi sifat asosiatif. (Z,+) grupoid dan asosiatif maka (Z,+) semigrup.

(iii) $\exists\, e \in$, Z $\forall\, a \in$ Z sedemikian hingga $a + e = e + a = a$, yaitu $e = 0 \in$ Z. (Z,+) semigrup dan memiliki elemen identitas maka (Z,+) monoid.

(iv) $\forall\, a \in$ Z mempunyai invers $a^{-1} \in$ Z, sedemikian hingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = 0$, yaitu $a^{-1} = -a \in$ Z. (Z,+) monoid dan setiap elemen mempunyai invers maka (Z,+) grup

$\forall\, a, b \in$ Z, $a + b = b + a$ memenuhi sifat komutatif.

Jadi (Z,+) merupakan grup komutatif.

2. Subgrup

Definisi II.B.2

Diberikan (G, ∘) suatu grup dan H ⊂ G, H ≠ ∅, jika (H, ∘) suatu grup, maka dikatakan bahwa H adalah subgrup dari G.

Teorema II.B.2

Jika (G, ∘) suatu grup dan H ⊂ G, H ≠ ∅, maka (H, ∘) disebut subgrup dari (G, ∘) jika dan hanya jika ∀a,b ∈ H, $a \circ b^{-1} \in H$

3. Koset dan grup faktor

Definisi II.B.3.1

Diberikan H suatu subgrup dari grup G, a suatu elemen dari G, maka:

(i) Ha = {ha | h ∈ H} disebut koset kanan dari H dalam G.

(ii) $aH = \{ah \mid h \in H\}$ disebut koset kiri dari H dalam G.

Contoh II.B.3.1

Diberikan M = {1, 2, 3, 4} dengan operasi perkalian modulo 5 merupakan suatu grup, dan N = {1, 4} subgrup dari M. Tentukan koset kanan dan koset kiri dari N dalam M!

Jawab:

Koset-koset kanan dari N dalam M

$N1 = \{1 \times_5 1, 4 \times_5 1\} = \{1, 4\}$

$N2 = \{1 \times_5 2, 4 \times_5 2\} = \{2, 3\}$

$N3 = \{1 \times_5 3, 4 \times_5 3\} = \{3, 2\}$

$N4 = \{1 \times_5 4, 4 \times_5 4\} = \{4, 1\}$

N1 = N4 dan N2 = N3

Jadi koset kanan dari N dalam M adalah N1 = {1, 4} dan N2 = {2, 3}.

Koset-koset kiri dari N dalam M

$1N = \{1 \times_5 1, 1 \times_5 4\} = \{1, 4\}$

$2N = \{2 \times_5 1, 2 \times_5 4\} = \{2, 3\}$

$3N = \{3 \times_5 1, 3 \times_5 4\} = \{3, 2\}$

$4N = \{4 \times_5 1, 4 \times_5 4\} = \{4, 1\}$

1N = 4N dan 2N = 3N

Jadi koset kiri dari N dalam M adalah 1N = {1, 4} dan 2N = {2, 3}

Definisi II.B.3.2

Diberikan H subgrup dari grup G, maka H disebut subgrup normal dari G dinotasikan $H \lhd G$ juka dan hanya jika $\forall g \in G$, $gH = Hg$.

Teorema II.B.3.1

Jika H merupakan subgrup dari grup G, maka $H \triangleleft G$ jika dan hanya jika $\forall g \in G$ dan $\forall h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.

Definisi II.B.3.3

Jika H subgrup normal dari grup G dan himpunan dari koset-koset $G/H = \{Hg \mid g \in G\}$ membentuk grup G/H dengan operasi yang sama dengan G, maka G/H disebut grup faktor dari G oleh H.

4. **Homomorfisma grup**

Definisi II.B.4.1

Jika $(G, \circ)$ dan $(H, *)$ merupakan grup, maka fungsi $f : G \rightarrow H$ disebut homomorfisma grup, jika

$$f(a \circ b) = f(a) * f(b), \text{ untuk tiap } a,b \in G$$

Jika homomorfisma f dari grup G ke grup H surjektif, maka f disebut epimorfisma. Apabila homomorfisma f injektif (satu-satu), maka f disebut monomorfisma.

Suatu isomorfisma grup adalah suatu homomorfisma grup yang bijektif. Bila ada suatu isomorfisma antara grup-grup $(G, \circ)$ dan $(H, *)$, kita katakan $(G, \circ)$ dan $(H, *)$ *isomorpik* dan ditulis $(G, \circ) \cong (H, *)$.

Contoh II.B.4.1

Diberikan (Z,+) adalah himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan. Fungsi $f: Z \longrightarrow Z$ didefinisikan oleh $f(x) = mx$, $\forall x \in Z$ dan m suatu bilangan bulat. Selidiki apakah fungsi f merupakan isomorfisma?

Jawab:

Pada contoh II.B.1 telah dibuktikan bahwa $(Z,+)$ merupakan grup. Fungsi $f: Z \longrightarrow Z$, $f(x) = mx$, $\forall x \in Z$ dan $m \in Z$.

Diselidiki apakah f merupakan suatu homomorfisma, $\forall a, b \in Z$, maka

$$\begin{aligned} f(a+b) &= m(a+b) \\ &= ma + mb \\ &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

Sehingga f merupakan homomorfisma

Fungsi f dikatakan injektif jika $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$ $\forall a,b \in Z$

$\forall a,b \in Z$ $a \neq b \Longrightarrow ma \neq mb$

$\Longrightarrow f(a) \neq f(b)$

Karena f suatu fungsi injektif, maka f suatu monomorfisma.

Fungsi f dikatakan surjektif jika $\forall b \in Z$ dengan $\exists a \in Z$, sehingga $f(a) = b$ atau range $(f) = Z$

$\exists m = 2 \in Z$, $\forall x \in Z$ maka $f(x) = 2x$

$x = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \} \in Z$, maka $f(Z) = \{ \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots \}$

akibatnya range (f) = himpunan bilangan genap, sehingga range $(f) \neq Z$ sehingga f bukan fungsi surjektif.

Karena f bukan surjektif maka f bukan isomorfisma.

Definisi II.B.4.2

Diberikan $f : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma. Kernel dari f dilambangkan Ker(f) adalah himpunan $Ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = 0_H\}$ dan Image dari f dilambangkan Im(f) adalah himpunan $Im(f) = \{f(x) \in H \mid x \in G\}$.

Teorema II.B.4

Diberikan homomorfisma $f : G \to H$, Ker (f) = $\{0_G\}$ jika dan hanya jika f merupakan fungsi injektif.

C. Ring

1. Pengertian Ring

Definisi II.C.1

Suatu sebarang himpunan yang dinotasikan R dengan dua operasi biner dimisalkan penjumlahan (+) dan perkalian ($*$) disebut ring jika memenuhi aksioma-aksioma berikut. Untuk sebarang $a,b,c \in R$,

(i) (R,+) merupakan grup komutatif

(ii) (R, $*$) berlaku tertutup dan asosiatif

(iii) (R,+, $*$) memenuhi distributif kiri dan kanan

$a * (b + c) = a * b + a * c$ dan

$(a + b) * c = a * c + b * c$

Contoh II.C.1

Diberikan himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Dinotasikan dengan $(Z, +, \times)$. Selidiki struktur dari $(Z, +, \times)$ apakah merupakan ring?

Jawab:

(i) Dari contoh II.B.1 telah dibuktikan bahwa (Z, +) merupakan grup komutatif

(ii) Diselidiki (Z, $\times$) merupakan semigrup

$\forall\ a, b \in$ Z, $a \times b \in$ Z memenuhi sifat tertutup

$\forall\ a, b, c \in$ Z, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ memenuhi sifat asosiatif sehingga (Z, $\times$) merupakan semigrup

(iii) $\forall\ a, b, c \in$ Z berlaku sifat distributif kiri dan kanan

- $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
- $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

Jadi (Z, +,×) merupakan ring.

2. Subring

Definisi II.C.2

Diberikan sebarang himpunan R dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang dinotasikan dengan (R, + , $*$) merupakan suatu ring dan S $\subset$ R dengan S $\neq \emptyset$, maka S disebut subring dari R jika (S, + , $*$) suatu ring.

Teorema II.C.2

Diberikan sebarang himpunan R dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang dinotasikan dengan (R, + , $*$) merupakan suatu ring dan S $\subset$ R dengan S $\neq \emptyset$, maka S disebut subring dari R jika dan hanya jika $\forall$ a, b $\in$ S berlaku

(i) $\mathrm{a} + \mathrm{b}^{-1} \in \mathrm{S}$

(ii) $\mathrm{a} * \mathrm{b} \in \mathrm{S}$

3. Tipe-tipe Ring

Definisi II.C.3

Diberikan (R, + , $*$) adalah suatu ring, maka:

1. R disebut ring dengan elemen satuan jika $(R, *)$ mempunyai elemen identitas, yaitu $\forall$ a $\in$ R, $\exists$ e $\in$ R memenuhi sifat $a * e = e * a = a$.
2. R disebut ring dengan setiap elemen tak nol (bukan elemen identitas operasi pertama) mempunyai invers, yaitu $\forall a \in R - \{0_R\}$,$\exists a^{-1} \in R$ memenuhi sifat $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.
3. R disebut ring komutatif jika $(R, *)$ memenuhi sifat komutatif, yaitu $\forall$ a, b $\in$ R berlaku $a * b = b * a$.
4. R disebut ring pembagian (division ring) atau lapangan miring (skew-field) jika $(R, *)$ mempunyai elemen kesatuan dan setiap elemen tak nolnya mempunyai invers.
5. R disebut lapangan (field) jika R adalah ring komutatif dengan elemen satuan, serta setiap elemen tak nolnya mempunyai invers terhadap operasi $*$.

Contoh II.C.3

Diberikan Z adalah himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Selidiki tipe-tipe ring dari struktur tersebut!

Jawab:

Himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian dinotasikan dengan $(Z,+,\times)$. Pada contoh II.C.1 telah dibuktikan bahwa $(Z,+,\times)$ merupakan ring.

Selanjutnya diselidiki pada $(Z,\times)$

(i) Misal e elemen netral , $\forall a \in Z$ berlaku $a \times e = e \times a = a$ yaitu $e = 1$.

(ii) Misal a^{-1} adalah invers dari a dengan $a \neq 0_R$, berlaku

$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$ yaitu $a^{-1} = \frac{1}{a} \notin$ Z sehingga (Z, ×) tidak punya invers.

(iii) $\forall\, a, b \in$ Z berlaku $a \times b = b \times a$ memenuhi sifat komutatif.

(Z, + , ×) merupakan ring dan berlaku sifat (i) dan (iii).

Jadi (Z, + , ×) merupakan ring komutatif dengan elemen kesatuan.

4. Daerah integral

Definisi II.C.4.1

Jika (R,+, ∗) ring komutatif, a ∈ R, a $\neq 0_R$ disebut pembagi nol, Jika terdapat b ∈ R, b $\neq 0_R$ sedemikian hingga a ∗ b = b ∗ a = 0_R

Contoh II.C.4.1

Diberikan Z_4 = {0, 1, 2, 3} terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat modulo 4 merupakan ring komutatif.

Selidiki apakah (Z_4,$+_4$,$\times_4$) memuat pembagi nol?

Jawab:

(Z_4, $+_4$,$\times_4$) merupakan ring komutatif. Diselidiki elemen pembagi nol.

$\times_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Tabel II.C.4 : Tabel Cayley (Z_4,$\times_4$)

Pada $(Z_4, \times_4)$, $\exists\, 2 \in Z_4$ merupakan elemen pembagi nol karena

$$2 \times_4 2 = 0$$

Jadi $(Z_4, +_4, \times_4)$ memuat pembagi nol yaitu 2.

Definisi II.C.4.2

Suatu ring yang komutatif dengan elemen satuan disebut daerah integral (*integral domain*) jika ring tersebut tidak mempunyai pembagi nol.

Contoh II.C.4.2

Diberikan $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo 4 merupakan ring komutatif.

Selidiki apakah $(Z_4, +_4, \times_4)$ merupakan daerah integral?

Jawab:

$(Z_4, +_4, \times_4)$ merupakan ring komutatif. Selanjutnya diselidiki apakah $(Z_4, +_4, \times_4)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

Pada $(Z_4, \times_4)$ Misal i adalah elemen identitas, maka $\forall\, a \in Z_4$ berlaku

$a \times_4 i = i \times_4 a = a$, jadi $i = 1$

Jadi $(Z_4, +_4, \times_4)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

Karena pada $(Z_4, \times_4)$ $\exists\, 2 \in Z_4$ yang merupakan elemen pembagi nol, sehingga $(Z_4, +_4, \times_4)$ bukan merupakan daerah integral.

5. **Ruang vektor atas lapangan**

Diberikan suatu himpunan tak kosong V dan lapangan F. Ruang vektor V atas lapangan F terdiri dari dua himpunan tak kosong V dan F yang dilengkapi dengan dua operasi, dimisalkan operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($*$) pada lapangan F, operasi penjumlahan pada V, dan operasi perkalian skalar dari F dan V yang bersifat tertutup di V.

Definisi II.C.5

Himpunan tak kosong V disebut ruang vektor atas lapangan F jika:

(i) (V,+) merupakan grup komutatif

(ii) Jika didefinisikan operasi perkalian skalar dari F dan V bersifat tertutup di V, yaitu:

$\bullet : F \times V \rightarrow V$

$(a, u) \rightarrow a \bullet u \in V$,$\forall\, a \in F$, $\forall u \in V$,

Memenuhi aksioma berikut:

a. $(a + b) \bullet v = a \bullet v + b \bullet v$

b. $a \bullet (u + v) = a \bullet u + a \bullet v$

c. $(a * b) \bullet v = a \bullet (b \bullet v)$

d. $1 \bullet v = v$

dengan a,b,1 $\in$ F dan $u, v \in$ V

D. Modul

1. Pengertian Modul

Definisi II.D.1

Diberikan (M,+) adalah grup komutatif dan (R, +, $*$) adalah ring dengan elemen satuan. Serta diberikan pula operasi biner (operasi pergandaan skalar) $\bullet : R \times M \rightarrow M$.

Himpunan M disebut *modul kiri* atas R (dinotasikan R-Modul M), jika $\forall$a,b $\in$ R dan $\forall$m,n $\in$ M memenuhi aksioma-aksioma pergandaan skalar berikut:

(i) (a + b) • m = a • m + b • m

(ii) a•(m + n) = a•m + a • n

(iii) (a $*$ b) • m = a • (b •m)

(iv) 1 • m = m

Diberikan grup komutatif (M,+) dan ring (R,+, $*$). Serta diberikan operasi pergandaan skalar • : M × R → M.

Himpunan M disebut *modul kanan* atas R (dinotasikan Modul-R M), $\forall$a,b $\in$ R dan $\forall$m,n $\in$ M memenuhi aksioma-aksioma perkalian skalar berikut:

(i) (m + n) • a = m • a + n •a

(ii) m • (a + b) = m • a + m • b

(iii) m • (a $*$ b) = (m • a) • b

(iv) m • 1 = m

Contoh II.D.1

Diberikan $M_{2\times3}$ merupakan himpunan semua matrik berukuran 2×3 yang elemennya merupakan bilangan real,didefinisikan:

$M_{2\times3} = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d,e,f \in \mathrm{R}\right\}$ terhadap penjumlahan matrik.

Dan himpunan bilangan real yang merupakan ring dengan elemen satuan terhadap operasi " $+$ " dan " $\times$ " dinotasikan (R, $+$,$\times$). Didefinisikan operasi perkalian skalar • : R × $M_{2\times3} \longrightarrow M_{2\times3}$

$(r\ , M) \longrightarrow r \bullet M = r\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb & rc \\ rd & re & rf \end{pmatrix}, \forall r, a, b, c, d, e, f \in$ R

Selidiki apakah $M_{2\times3}$ merupakan modul atas ring R?

Jawab:

Langkah pertama diselidiki ($M_{2\times3}$, +) merupakan grup komutatif

$\forall A, B, C \in M_{2\times3}$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

(i) Memenuhi sifat tertutup

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix} \in M_{2\times3}$$

(ii) Memenuhi sifat asosiatif

$$(A + B) + C = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a+g)+m & (b+h)+n & (c+i)+o \\ (d+j)+p & (e+k)+q & (f+l)+r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+(g+m) & b+(h+n) & c+(i+o) \\ d+(j+p) & e+(k+q) & f+(l+r) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix}\right)$$

$$= A + (B + C)$$

(iii) Ada elemen identitas

Misal elemen identitas E = $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_4 & e_5 & e_6 \end{pmatrix} \in M_{2\times3}$ maka berlaku

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_4 & e_5 & e_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_4 & e_5 & e_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Yaitu $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_4 & e_5 & e_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}$

(iv) Setiap elemen punya invers

Misal invers $M^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & b^{-1} & c^{-1} \\ d^{-1} & e^{-1} & f^{-1} \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}$ maka berlaku

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^{-1} & b^{-1} & c^{-1} \\ d^{-1} & e^{-1} & f^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & b^{-1} & c^{-1} \\ d^{-1} & e^{-1} & f^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Yaitu $\begin{pmatrix} a^{-1} & b^{-1} & c^{-1} \\ d^{-1} & e^{-1} & f^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}$

(v) Memenuhi sifat komutatif

$\forall\, A, B \in M_{2\times 3},\ A + B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g+a & h+b & i+c \\ j+d & k+e & l+f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$= B + A$$

Sehingga $(M_{2\times 3}, +)$ merupakan grup komutatif.

$(R, +, \times)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan

$\bullet : R \times M_{2\times 3} \longrightarrow M_{2\times 3}$

$(r\ , M) \longrightarrow r \bullet M = \ r\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb & rc \\ rd & re & rf \end{pmatrix}, \forall r, a, b, c, d, e, f \in$ R

$\forall A, B \in M_{2\times 3}\ , \forall r_1, r_2 \in R$

Memenuhi aksioma modul:

(i) $(r_1 + r_2) \bullet A = \ (r_1 + r_2) \bullet \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (r_1 + r_2)a & (r_1 + r_2)b & (r_1 + r_2)c \\ (r_1 + r_2)d & (r_1 + r_2)e & (r_1 + r_2)f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1a + r_2a & r_1b + r_2b & r_1c + r_2c \\ r_1d + r_2d & r_1e + r_2e & r_1f + r_2f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1a & r_1b & r_1c \\ r_1d & r_1e & r_1f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2a & r_2b & r_2c \\ r_2d & r_2e & r_2f \end{pmatrix}$$

$$= r_1 \bullet \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + r_2 \bullet \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$= r_1 \bullet A + r_2 \bullet B$$

(ii) $r_1 \bullet (A + B) \ = r_1 \bullet \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}\right\}$

$$= \ r_1 \bullet \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1(a+g) & r_1(b+h) & r_1(c+i) \\ r_1(d+j) & r_1(e+k) & r_1(f+l) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1a + r_1g & r_1b + r_1h & r_1c + r_1i \\ r_1d + r_1j & r_1e + r_1k & r_1f + r_1l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1a & r_1b & r_1c \\ r_1d & r_1e & r_1f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1g & r_1h & r_1i \\ r_1j & r_1k & r_1l \end{pmatrix}$$

$$= r_1 \bullet \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + r_1 \bullet \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$$

$$= r_1 \bullet A + r_1 \bullet B$$

(iii) $(r_1 * r_2) \bullet A \ = \ (r_1 * r_2) \bullet \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$$= (r_1 r_2) \bullet \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (r_1 r_2)a & (r_1 r_2)b & (r_1 r_2)c \\ (r_1 r_2)d & (r_1 r_2)e & (r_1 r_2)f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1(r_2 a) & r_1(r_2 b) & r_1(r_2 c) \\ r_1(r_2 d) & r_1(r_2 e) & r_1(r_2 f) \end{pmatrix}$$

$$= r_1 \bullet \begin{pmatrix} r_2 a & r_2 b & r_2 c \\ r_2 d & r_2 e & r_2 f \end{pmatrix}$$

$$= r_1 \bullet \left(r_2 \bullet \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \right)$$

$$= r_1 \bullet (r_2 \bullet A)$$

(iv) $1\bullet A = 1 \bullet \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$= A$$

Karena memenuhi aksioma-aksioma tersebut maka $M_{2\times 3}$ merupakan modul atas ring R.

2. **Submodul**

Definisi II.D.2

Diketahui M adalah modul atas ring R, N $\subset$ M, N $\neq \emptyset$,maka N disebut submodul dari M jika terhadap operasi yang sama dengan M, himpunan N juga merupakan modul atas ring R. Dengan kata lain N merupakan submodul dalam modul M atas ring R jika:

(i) (N, +) grup komutatif dari M

(ii) Operasi pergandaan skalar pada M juga berlaku pada N

(iii) N memenuhi aksioma modul

Teorema II.D.2

Diketahui R-Modul M, dan N ⊂ M, N ≠ ∅, maka N disebut submodul dari M jika dan hanya jika memenuhi dua syarat berikut:

1. m – n ∈ N , ∀ m,n ∈ N
2. r n ∈ N , ∀n ∈ N ∀r ∈ R

Contoh II.D.2

Misalkan Z adalah himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa, dan diketahui Z merupakan modul atas ring Z. Selidiki apakah 3Z submodul dari Z?

Jawab:

3Z ⊂ Z dan 3Z ≠ ∅ karena 3Z = { ... ,-6, -3,0,3,6, ... }

∀ x, y ∈ 3Z, ∀ r ∈ Z dengan $x = 3p_1$, $y = 3p_2$, p_1, p_2 ∈ Z

(i) $x - y = 3p_1 - 3p_2$

$= 3(p_1 - p_2)$

$= 3p_3$, dengan $p_3 = p_1 - p_2$ ∈ Z karena p_1, p_2 ∈ Z dan operasi tertutup di Z

sehingga $x - y$ ∈ 3Z

(ii) $r \cdot x = r \cdot (3p_1)$

$= (3p_1) \cdot r$

$= 3(p_1 r)$

$= 3p_4$, dengan $p_4 = p_1 r$ ∈ Z sebab p_1, r ∈ Z operasi tertutup di Z

sehingga $r \cdot x$ ∈ 3Z

Jadi terbukti bahwa $3Z$ submodul dari Z

3. Modul Faktor

Teorema II.D.3

Diketahui M modul atas ring R, N sebarang submodul dari M, dan R ring dengan elemen satuan, maka M/N adalah R-modul terhadap operasi pergandaan koset $r(a+N) = (ra)+N$, $\forall r \in R$ dan $a+N \in M/N$. Selanjutnya M/N disebut modul faktor.

Contoh II.D.3

Diberikan himpunan bilangan bulat Z merupakan modul atas ring Z. Diberikan juga himpunan $M = \{6z|z \in Z\}$. Selidiki apakah modul faktor dari Z oleh M.

Jawab:

Z-Modul Z,(Z,+,×) merupakan ring dengan elemen satuan

M submodul Z

Koset kiri dari M dalam Z

$0 + M = \{0 + 6z|\ z \in Z\} = \{\ldots,-12,-6,0,6,12,\ldots\} = (-6) + M = 6 + M = \ldots$

$1 + M = \{1 + 6z|\ z \in Z\} = \{\ldots,-11,-5,1,7,13,\ldots\} = (-5) + M = 7 + M = \ldots$

$2 + M = \{2 + 6z|\ z \in Z\} = \{\ldots,-10,-4,2,8,14,\ldots\} = (-4) + M = 8 + M = \ldots$

$3 + M = \{3 + 6z|\ z \in Z\} = \{\ldots,-9,-3,3,9,15,\ldots\} = (-3) + M = 9 + M = \ldots$

$4 + M = \{4 + 6z|\ z \in Z\} = \{\ldots,-8,-2,4,10,16,\ldots\} = (-2) + M = 10 + M = \ldots$

$5 + M = \{5 + 6z|\ z \in Z\} = \{\ldots,-7,-1,5,11,17,\ldots\} = (-1) + M = 11 + M = \ldots$

$0 + M = M$	$3 + M = 3M$
$1 + M = 1M$	$4 + M = 4M$
$2 + M = 2M$	$5 + M = 5M$

$^{Z}/_{M}$ = {M, 1M, 2M, 3M, 4M, 5M}

Diselidiki $^{Z}/_{M}$ merupakan modul atas ring Z

1. $^{Z}/_{M}$ merupakan grup komutatif

+	M	1M	2M	3M	4M	5M
M	M	1M	2M	3M	4M	5M
1M	1M	2M	3M	4M	5M	M
2M	2M	3M	4M	5M	M	1M
3M	3M	4M	5M	M	1M	2M
4M	4M	5M	M	1M	2M	3M
5M	5M	M	1M	2M	3M	4M

Tabel II.D.3 : Tabel Cayley Modul Faktor $^{Z}/_{M}$

2. $(Z,+,\times)$ merupakan ring dengan elemen satuan
3. Memenuhi operasi pergandaan koset

$\forall z_1, z_2 \in Z, (a + 6z), (b + 6z) \in M$

$\bullet(z_1, (a + 6z)) = z_1 \bullet (a + 6z) = (z_1 a) + 6z$

(i) $(z_1 + z_2) \bullet (a + 6z) = \left((z_1 + z_2)a\right) + 6z$

$= (z_1 a + z_2 a) + 6z$

$= (z_1 a + 6z) + (z_2 a + 6z)$

$= z_1 \bullet (a + 6z) + z_2 \bullet (a + 6z)$

(ii) $z_1 \bullet \left((a + 6z) + (b + 6z)\right) = z_1 \bullet \left((a + b) + 6z\right)$

$= (z_1(a + b) + 6z)$

$= \left((z_1 a + z_1 b) + 6z\right)$

$= (z_1 a + 6z) + (z_1 b + 6z)$

$= z_1 \bullet (a + 6z) + z_1 \bullet (b + 6z)$

(iii) $(z_1 z_2) \bullet (a + 6z) = \big((z_1 z_2) a\big) + 6z$

$= \big(z_1 (z_2 a)\big) + 6z$

$= z_1 \bullet ((z_2 a) + 6z))$

$= z_1 \bullet \big(z_2 \bullet (a + 6z)\big)$

(iv) $1. (a + 6z) = (a + 6z)$

$Z/_M$ merupakan modul atas ring Z, jadi $Z/_M$ merupakan modul faktor dari Z oleh M.

4. Homomorfisma Modul

Definisi II.D.4.1

Diberikan M,N adalah modul atas ring R. Fungsi f : M → N adalah homomorfisma modul jika:

(i) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$, $\forall\, m_1, m_2 \in M$

(ii) $f(rm) = r\,f(m)$, $\forall\, m \in M$ dan $r \in R$

Contoh II.D.4.1

R^2 adalah modul atas R. Didefinisikan pengaitan f : $R^2 \to R^2$ dengan $f(x, y) = (x + y, x), \forall (x, y) \in R^2$

Selidiki apakah f merupakan homomorfisma modul?

Jawab:

(i) Diselidiki apakah f merupakan fungsi

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

f $(x_1, y_1) = (x_1 + y_1, x_1)$

$= (x_2 + y_2, x_2)$

= f (x_2, y_2)

∴ f merupakan fungsi

(ii) $\forall (x_1, y_1)$, $(x_2, y_2) \in R^2$ dan r ∈ R

- f$\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big)$ = f$(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2)$

$= (x_1 + y_1, x_1) + (x_2 + y_2, x_2)$

= f (x_1, y_1) + f (x_2, y_2)

- f (r $(x_1, y_1)) =$ f (rx_1, ry_2)

= (rx_1 + ry_1, ry_1)

= r$(x_1 + y_1, y_1)$

= r f(x_1, y_1)

Jadi f homomorfisma modul

Definisi II.D.4.2

Diberikan fungsi f : M →N adalah homomorfisma modul. Kernel dan Image dari homomorfisma f didefinisikan sebagai berikut:

1. Ker(f) = { x ∈ M| f (x) = 0_N}
2. Im(f) = { y ∈ N| y = f(x)}

Contoh II.D.4.2

f : $R^2 \rightarrow R^2$ dengan f (x, y) = (x + y , x), ∀(x, y) ∈ R^2 merupakan homomorfisma modul. Carilah Ker(f) dan Im(f)!

Jawab:

Ker (f) = $\{(x, y) \in R^2 |\ f\ (x, y) = 0_{R^2}\}$

$= \{(x, y) \in R^2 |\ (x + y, x) = (0,0)\}$

$= \{(x, y) \in R^2 |\ x + y = 0 \text{ dan } x = 0\}$

$= \{(x, y) \in R^2 |\ x = 0, y = 0\}$

$= \{(0,0)\}$

$= \{0_{R^2}\}$

Im (f) $= \{(u, v) \in R^2 |(u, v) = f(x, y), \text{ untuk suatu } (x, y) \in R^2\}$

$= \{(u, v) \in R^2 |(u, v) = (x + y, x)\}$

$= \{(u, v) \in R^2 | u = x + y, v = x\}$

$= \{(x + y, x)\}$

Lemma II.D.4

Diberikan fungsi f : M → N adalah homomorfisma modul,maka Ker(f) ⊆ M dan Im(f) ⊆ N adalah submodul.

Definisi II.D.4.3

Diketahui M dan N adalah modul atas ring R dan f : M → N merupakan homomorfisma modul, jika f adalah pemetaan bijektif yaitu f pemetaan injektif sekaligus surjektif, maka pemetaan f disebut isomorfisma modul.

Contoh II.D.4.3

Diketahui matriks M = $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c, d \in Z\right\}$ dan M adalah modul atas ring Z. Didefinisikan pengaitan ϕ: M⟶M, ϕ (A) = A^T, ∀ A ∈ M, A^T adalah transpose dari matriks A. Selidiki apakah ϕ isomorfisma?

Jawab:

(i) Diselidiki apakah ϕ merupakan fungsi

$\forall\ A, B\ \in$ M, $A = B\ \Rightarrow A^T = B^T$

$\Rightarrow \phi(A) = \phi(B)$

$\therefore \phi$ merupakan fungsi

(ii) Diselidiki apakah ϕ merupakan homomorfisma modul

$\forall\ A, B\ \in$ M dan $r \in$ Z

- $\phi(A + B) = (A + B)^T$

  $= A^T + B^T$

  $= \phi(A) + \phi(B)$

- $\phi(rA) = (rA)^T$

  $= r\ A^T$

  $= r\phi(A)$

Jadi ϕ homomorfisma modul

(iii) Diselidiki apakah ϕ injektif jika memenuhi

$\forall\ A, B \in$ M , $\phi(A) = \phi(B) \Rightarrow A = B$

$\phi(A) = \phi(B) \Rightarrow A^T = B^T$

$\Rightarrow A = B$

ϕ merupakan injektif maka ϕ merupakan monomorfisma

(iv) Diselidiki apakah ϕ surjektif jika memenuhi

$\forall A \in$ M (kodomain) maka selalu $\exists B \in$ M (domain) dengan $B = A^T \in$ M, sehingga

$\phi(B) = \phi(A^T)$

$= (A^T)^T$

$= A$

ϕ merupakan surjektif maka ϕ merupakan epimorfisma

Karena ϕ berlaku injektif dan surjektif sehingga ϕ merupakan isomorfisma

Himpunan semua fungsi homomorfisma dari M ke N dinotasikan sebagai $\mathrm{Hom_R(M, N)}$.

Teorema II.D.4

Jika M dan N adalah R-modul dan R adalah ring komutatif maka $\mathrm{Hom_R(M, N)}$ adalah R-modul.

5. Elemen Torsi dan Modul Torsi

Definisi II.D.5.1

Diberikan M adalah modul atas ring R, m ∈ M disebut elemen torsi jika dan hanya jika terdapat r ∈ R – $\{0_R\}$ sehingga berlaku r m = 0_M.

Definisi II.D.5.2

Diberikan M adalah modul atas ring R. M disebut modul torsi jika setiap elemennya merupakan elemen torsi. Himpunan yang berisi elemen-elemen torsi dalam modul M dinotasikan dengan M_T

Contoh II.D.5.1

Diberikan $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ dengan operasi penjumlahan modulo 6 dan perkalian modulo 6 merupakan modul atas Z_6. Selidiki elemen-elemen torsi yang terdapat pada modul Z_6 atas ring Z_6!

Jawab:

Z_6 merupakan modul atas ring Z_6

Terdapat $a \in Z_6 - \{0_{Z_6}\}$, p ∈ M dan misal p merupakan elemen torsi maka memenuhi $a \times_6$ p = $\{0_{Z_6}\}$

Dari tabel Cayley $(Z_6,\times_6)$

$\times_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Tabel II.D.5 : Tabel Cayley $(\mathbf{Z_6,\times_6})$

- $\forall a \in Z_6 - \{0\}$ memenuhi $a * 0 = a \times_6 0 = 0$
- $\exists 2 \in Z_6 - \{0\}$ memenuhi $2 * 3 = 2 \times_6 3 = 0$
- $\exists 3 \in Z_6 - \{0\}$ memenuhi $3 * 2 = 3 \times_6 2 = 0$
- $\exists 3 \in Z_6 - \{0\}$ memenuhi $3 * 4 = 3 \times_6 4 = 0$
- $\exists 4 \in Z_6 - \{0\}$ memenuhi $4 * 3 = 4 \times_6 3 = 0$

Jadi $0,2,3,4 \in Z_6$ merupakan elemen torsi pada modul Z_6 atas ring Z_6

Contoh II.D.5.2

$(Z_6, +_6)$ merupakan himpunan bilangan bulat modulo 6 dengan operasi penjumlahan modulo 6. Dan diberikan pula $(Z, +, \times)$ merupakan himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Dan Z_6

merupakan modul atas ring $(\mathrm{Z},+,\times)$. Selidiki apakah Z_6 merupakan modul torsi atas ring $(\mathrm{Z},+,\times)$?

Jawab:

Z_6 merupakan modul atas ring Z

Menurut Definisi II.D.5.1 kita ambil 6k $\in \mathrm{Z}-\{0_\mathrm{z}\}$,dengan k $\in \mathrm{Z}-\{0_\mathrm{z}\}$

$\exists$ 6k $\in \mathrm{Z}-\{0_\mathrm{z}\}$, Z_6 ={0, 1, 2, 3, 4, 5} memenuhi:

- 6k $*$ 0 = 6k $\times_6$ 0 = 0
- 6k $*$ 1 = 6k $\times_6$ 1 = 0
- 6k $*$ 2 = 6k $\times_6$ 2 = 0
- 6k $*$ 3 = 6k $\times_6$ 3 = 0
- 6k $*$ 4 = 6k $\times_6$ 4 = 0
- 6k $*$ 5 = 6k $\times_6$ 5 = 0

$\forall m \in \mathrm{Z}_6$ dapat dinyatakan sebagai 6k $* m$ = 0, elemen torsinya adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5 = Z_6.

Jadi Z_6 merupakan modul torsi.

Teorema II.D.5

Diketahui R-Modul M dan $\mathrm{M_T}$ himpunan semua elemen torsi pada M. Jika R daerah integral, maka $\mathrm{M_T}$ merupakan submodul dari M.

E. Basis

Syarat basis adalah membangun dan bebas linier,berikut ini dijelaskan definisi basis.

Definisi II.E

Diberikan M adalah modul atas ring R dan $X \subseteq M$, $X \neq \emptyset$. Himpunan X dikatakan basis untuk M jika dan hanya jika memenuhi dua syarat sebagai berikut:

1. X merupakan pembangun dari M

   Setiap $m \in M$ dapat dinyatakan sebagai $m = a_1 m_1 + \ldots + a_n m_n$

2. X bebas linier

   Persamaan $a_1 m_1 + \ldots + a_n m_n = 0_M$ hanya dipenuhi oleh :

   $a_1 = \ldots = a_n = 0_R$,

   dengan $a_1, \ldots, a_n \in R$, $m_1, \ldots, m_n \in X$

F. Jumlahan Langsung

Definisi II.F

Diketahui $M_1, \ldots, M_n$ untuk suatu $n \in N$ merupakan modul-modul atas R, maka produk Cartesian $M_1 \times \ldots \times M_n$ juga merupakan modul atas ring R dengan operasi:

1. $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,

   $\forall\, (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in M_1 \times \ldots \times M_n$

2. $r\,(x_1, \ldots, x_n) = (rx_1, \ldots, rx_n)$, $\forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in M_1 \times \ldots \times M_n$ dan $r \in R$

Modul $M_1 \times \ldots \times M_n$ disebut jumlahan langsung dari modul $M_1, \ldots, M_n$ dan dinotasikan $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ atau $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$

G. Barisan Eksak

Diketahui $M_1, \ldots, M_n$ adalah submodul dari R-modul M, dapat dibentuk suatu barisan yang disebut dengan barisan eksak.

Definisi II.G

Diketahui R-Modul M dan $\{M_i\}$ adalah submodul dari M. Diketahui juga f_i merupakan homomorfisma dari M_{i-1} ke M_i. Barisan dari R-Modul dan homomorfisma f_i

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f} M_i \xrightarrow{g} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

Dikatakan eksak pada M_i jika dan hanya jika Im(f) = Ker(g). Barisan tersebut dikatakan barisan eksak jika eksak pada setiap M_i.

H. Modul Bebas

Diberikan modul M atas ring R, dan $X \subset M$, $X \neq \emptyset$, X dikatakan basis untuk M jika dan hanya jika X merupakan pembangun dari M dan X bebas linier.

Definisi II.H

Diberikan modul M atas ring R, M disebut modul bebas jika M mempunyai basis.