

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Jumlahan Power Binomial

Power Binomial erat kaitannya dengan koefisien binomial. Koefisien binomial

dinotasikan dengan $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$ untuk $n \geq 1$

dan $\binom{n}{0} = 1$.

Selanjutnya Jumlahan Power Binomial didefinisikan:

Definisi II.A.1:

Menurut Gradshteyn dan Ryzik (2007), jika diberikan α merupakan bilangan real dan $x \in R, |x| < 1$ maka

$$(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j$$

dengan $j \in Z^+ \cup \{0\}$, dimana Z^+ adalah himpunan bilangan bulat positif.

Dari definisi tersebut diperoleh:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{(\alpha-j)!j!} x^j \end{aligned} \tag{2.1}$$

Contoh 1:

$$(1+0,3)^3 = \dots$$

Jawab:

$$\begin{aligned}
 (1 + 0,3)^3 &= \sum_{j=0}^3 \frac{3!}{(3-j)!j!} 0,3^j \\
 &= \frac{3!}{(3-0)!0!} (0,3)^0 + \frac{3!}{(3-1)!1!} (0,3)^1 + \frac{3!}{(3-2)!2!} (0,3)^2 + \\
 &\quad \frac{3!}{(3-3)!3!} (0,3)^3 \\
 &= 1 + 3 \cdot (0,3)^1 + 3 \cdot (0,3)^2 + (0,3)^3 \\
 &= 1 + 0,9 + 0,27 + 0,027 \\
 &= 2,197
 \end{aligned}$$

B. Turunan dan Integral

1. Turunan

Turunan dari $y = f(x)$ adalah $f'(x)$ yang sering dinotasikan dengan $\frac{dy}{dx}$

dan juga disebut dengan turunan fungsi satu peubah. Menurut Leithold (1991), turunan didefinisikan:

Definisi II.A.2:

Turunan fungsi f adalah fungsi f' (dibaca f aksen) dimana pada setiap bilangan sebarang x di dalam daerah asal f , nilainya adalah

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

jika limit tersebut ada.

Sifat-sifat turunan yang digunakan pada penelitian ini adalah:

a. Jika c suatu konstanta dan jika $f(x) = c$ untuk semua x , maka

$$f'(x) = 0$$

b. Jika n bilangan bulat positif dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$

c. Jika c suatu konstanta, $f'(x)$ ada, dan $y = c \cdot f(x)$, maka $y' = c \cdot f'(x)$

d. Jika $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada, maka turunan dari $y = f(x) \pm g(x)$ adalah

$$y' = f'(x) \pm g'(x)$$

e. Jika $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada, maka turunan dari $y = f(x) \cdot g(x)$ adalah

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

f. Jika $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada, maka turunan dari $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ adalah

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

g. Jika $f(x) = e^x$ maka $f'(x) = e^x$

h. Jika $y = f(u)$ dan $\frac{dy}{du}$ ada, dan $u = g(x)$ dan $\frac{du}{dx}$ ada, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Selanjutnya perlu dikaji pula mengenai turunan fungsi dua peubah. Sebuah variabel z merupakan sebuah fungsi dari dua variabel x dan y jika untuk setiap pasangan (x, y) yang diberikan dapat ditentukan satu atau lebih nilai z yang dinotasikan dengan $f(x, y)$. Sebagai contoh, jika $f(x, y) = x^2 + 2y^3$ maka $f(3, -1) = 3^2 + 2(-1)^3 = 7$.

Dalam menentukan turunan fungsi dua peubah digunakan turunan parsial yang didefinisikan:

Definisi II.A.3:

Misalkan f suatu fungsi dua peubah x dan y . Turunan parsial f terhadap x

adalah fungsi f_x (atau $\frac{\partial f}{\partial x}$) yang nilainya dititik (x, y) sebarang dalam

wilayah f diberikan:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

asalkan limit ini ada. Turunan parsial f terhadap y adalah fungsi f_y (atau

$\frac{\partial f}{\partial y}$) yang nilainya di titik (x, y) sebarang dalam wilayah f diberikan

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

asalkan limit ini ada.

Hal ini mengandung arti bahwa turunan parsial dari suatu variabel merupakan turunan biasa dari sebuah fungsi dari beberapa variabel terhadap salah satu variabel bebas tersebut, dengan memegang semua variabel bebas yang lainnya konstan. Turunan parsial dari $f(x, y)$

terhadap x dan y berturut-turut dinyatakan oleh $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Contoh 2:

Jika $f(x, y) = 2x^2 + 3xy^3$, tentukan nilai dari $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$!

Jawab:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 3y^3 \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 9xy^2 = 9xy^2.$$

2. Integral

Definisi II.A.4:

Fungsi $F(x)$ disebut suatu anti turunan atau integral tak tentu dari $f(x)$ pada selang tertentu, jika untuk semua x dalam selang tertentu berlaku

$$F'(x) = f(x).$$

Integral terbagi atas integral tentu dan integral tak tentu. Ada beberapa sifat-sifat integral tentu, jika $f(x)$ dan $g(x)$ integrabel di dalam $[a, b]$ maka:

$$\text{a. } \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{b. } \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \text{ dimana } c \text{ merupakan sebarang konstanta}$$

$$\text{c. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ dengan } f(x) \text{ integrabel di dalam } [a, c]$$

dan $[c, b]$

$$\text{d. } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\text{e. } \int_a^a f(x) dx = 0$$

Sedangkan beberapa aturan untuk integral tak tentu diberikan:

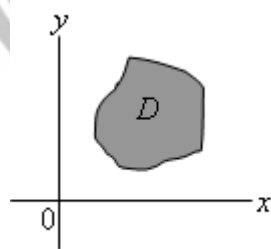
- a. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$ karena $\frac{d}{du} \left(\frac{u^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{n+1}{n+1} u^{n+1-1} = u^n$
- b. $\int e^u du = e^u + c$ karena $\frac{d}{du} (e^u) = e^u$

Ada beberapa metode pengintegralan, salah satunya adalah metode

integral parsial. Jika diberikan $u = f(x)$ dan $v = g(x)$ maka:

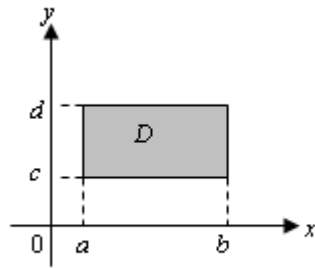
$$\int u dv = uv - \int v du \text{ atau } \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Integral yang telah dibahas di atas adalah integral biasa dengan fungsi satu peubah. Misalkan D suatu daerah di bidang (x, y) dan $z = f(x, y)$ fungsi yang didefinisikan pada D . Integral lipat dua f pada D adalah $\iint_D f(x, y) dA$ dengan dA diferensial elemen luas.



Gambar 1. Daerah pengintegralan pada bidang (x, y)

Integral lipat dua yang dibahas pada penelitian ini adalah integral lipat dua dengan daerah berupa persegi panjang yang memiliki sifat sebagai berikut:



Gambar 2. Integral lipat dua dengan D daerah persegi panjang

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dA &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) dx \right] dy \\ &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dx \end{aligned}$$

Contoh 3:

Tentukan nilai dari $\int_0^3 \int_1^2 2x + 3y \, dx \, dy$!

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } \int_0^3 \int_1^2 2x + 3y \, dx \, dy &= \int_0^3 \left[\int_1^2 2x + 3y \, dx \right] dy \\ &= \int_0^3 \left. x^2 + 3xy \right|_1^2 dy \\ &= \int_0^3 3 + 3y \, dy \\ &= 3y + \frac{3}{2} y^2 \Big|_0^3 \\ &= 9 + \frac{27}{2} = \frac{45}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \int_0^3 \int_1^2 2x + 3y \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 2x + 3y \, dx \right] dy \\
 &= \int_1^2 2xy + \frac{3}{2} y^2 \Big|_0^3 dy \\
 &= \int_1^2 6x + \frac{27}{2} dx \\
 &= 3x^2 + \frac{27}{2} x \Big|_1^2 \\
 &= 9 + \frac{27}{2} = \frac{45}{2}
 \end{aligned}$$

Dari perhitungan pada contoh di atas tampak bahwa

$$\int_0^3 \int_1^2 2x + 3y \, dx \, dy = \int_0^3 \left[\int_1^2 2x + 3y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 2x + 3y \, dy \right] dx$$

C. Beberapa Fungsi Khusus

Beberapa fungsi khusus yang disajikan adalah fungsi Gamma, Fungsi Tricomi, Fungsi Whittaker, fungsi Gamma tak lengkap, dan fungsi Beta.

1. Fungsi Gamma

Fungsi Gamma merupakan salah satu fungsi khusus yang dikenalkan oleh Euler pada tahun 1729. Selanjutnya, diberikan definisi dari fungsi Gamma menurut Beals dan Wong (2010):

Definisi II.C.1:

Jika $\alpha \in R, \alpha > 0$, maka

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx \quad [2.2]$$

dengan $x \in R, x > 0$.

Teorema II.C.1:

Jika $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, maka $\Gamma(1) = 1$

Bukti:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx \\
 &= \int_0^{\infty} x^0 e^{-x} dx \\
 &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-x} dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\
 &= -e^{-x} \Big|_0^{\infty} \\
 &= -\frac{1}{e^{\infty}} - \left(-\frac{1}{e^0}\right) \\
 &= 0 - (-1) = 1
 \end{aligned}$$

Selanjutnya fungsi Gamma $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, dengan menggunakan

integral parsial dengan memisalkan:

$$u = x^{\alpha-1} \Rightarrow du = (\alpha - 1)x^{\alpha-2} dx \text{ dan}$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

maka:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\alpha) &= \int_{x=0}^{\infty} u dv \\
 &= uv - \int_{x=0}^{\infty} v du
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\alpha) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\
 &= x^{\alpha-1}(-e^{-x})|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2} dx \\
 &= x^{\alpha-1}(-e^{-x})|_0^{\infty} + (\alpha-1) \int_0^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx \\
 &= x^{\alpha-1}(-e^{-x})|_0^{\infty} + (\alpha-1) \int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)-1} e^{-x} dx \\
 &= (\infty^{\alpha-1}(-e^{-\infty}) - 0^{\alpha-1}(-e^{-0})) + (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \\
 &= (\infty \cdot 0 - 0 \cdot 1) + (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \\
 &= 0 + (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \\
 &= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, maka:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\alpha-1) &= \int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)-1} e^{-x} dx \\
 &= ((\alpha-1)-1)\Gamma((\alpha-1)-1) \\
 &= (\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)
 \end{aligned}$$

Jika $\alpha = n$, maka:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\
 &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
 &= (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3) \\
 &= (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3) \dots \Gamma(1) \\
 &= (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3) \dots 1 \\
 &= (n-1)!
 \end{aligned}$$

[2.3]

Contoh 4:

Hitung nilai dari $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$

Jawab:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx &= \int_0^{\infty} x^{4-1} e^{-x} dx \\ &= \Gamma(4) \\ &= 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \end{aligned}$$

Dalam fungsi Gamma, berlaku $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$.

Bukti:

$$\begin{aligned} \alpha\Gamma(\alpha) &= \alpha(\alpha - 1)! \\ &= \alpha! \\ &= \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{(\alpha+1)-1} e^{-x} dx \\ &= \Gamma(\alpha + 1) \end{aligned}$$

Jika $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1)$ dan $(\alpha)_0 = 1$, berakibat

$$(\alpha)_n \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + n)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} (\alpha)_n \Gamma(\alpha) &= \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1)(\alpha - 1)! \\ &= (\alpha + n - 1)(\alpha + n - 2) \dots (\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 1)! \\ &= (\alpha + n - 1)! \\ &= \Gamma(\alpha + n) \end{aligned}$$

Contoh 5:

$$\frac{\Gamma(5)}{2\Gamma(2)} = \dots ?$$

Jawab:

$$\frac{\Gamma(5)}{2\Gamma(2)} = \frac{\Gamma(3+2)}{\Gamma(2+1)} = \frac{(3)_2\Gamma(3)}{\Gamma(3)} = (3)_2 = 3.4 = 12$$

2. Fungsi Whittaker

Fungsi Whittaker merupakan fungsi yang dikenalkan pertama kali oleh Edmund Taylor Whittaker. Di bawah ini diberikan definisi fungsi Whittaker:

Definisi II.C.2:

Menurut Gradshteyn dan Ryzik (2007), fungsi Whittaker didefinisikan:

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \frac{z^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-zt}t^{\mu-\lambda-\frac{1}{2}}(1+t)^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}} dt \quad [2.4]$$

untuk $(\mu - \lambda) \in R, (\mu - \lambda) > -\frac{1}{2}, |\arg z| < \frac{\pi}{2}$

3. Fungsi Tricomi

Fungsi Tricomi merupakan fungsi yang diperkenalkan oleh Francesco Tricomi pada tahun 1947. Berikut definisi dari fungsi Tricomi menurut Gradshteyn dan Ryzik (2007):

Definisi II.C.3:

Diberikan $\theta, \gamma, z \in R, 0 < \theta < \gamma$ dan $z > 0$, maka:

$$\Psi(\theta, \gamma; z) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^{\infty} e^{-zx} x^{\theta-1} (1+x)^{\gamma-\theta-1} dx \quad [2.5]$$

dengan $x \in R, x > 0$

4. Fungsi Gamma Tak Lengkap

Fungsi Gamma dapat ditulis:

$$\Gamma(\alpha) = \gamma(\alpha, z) + \Gamma(\alpha, z)$$

Masing-masing dari $\gamma(\alpha, z)$ dan $\Gamma(\alpha, z)$ disebut fungsi Gamma tak lengkap. Berikut definisi fungsi Gamma tak lengkap menurut Gradshteyn dan Ryzik (2007):

Definisi II.C.4:

Diberikan $\alpha, z \in R$, dan $\alpha, z > 0$, maka

$$\gamma(\alpha, z) = \int_0^z x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

dan

$$\Gamma(\alpha, z) = \int_z^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Selain itu, fungsi Gamma tak lengkap juga dapat ditulis:

$$\Gamma(\alpha, pq) = q^{\alpha} e^{-pq} \int_0^{\infty} (x+p)^{\alpha-1} e^{-qx} dx \quad [2.6]$$

dengan $\alpha, p, q, x \in R, p, q, x > 0$ dan $\alpha > 1$

Fungsi Gamma tak lengkap juga dapat didefinisikan ke dalam bentuk lain dalam hubungannya dengan fungsi Tricomi.

Definisi II.C.5:

Fungsi Gamma tak lengkap didefinisikan:

$$\Gamma(\alpha, z) = z^\alpha e^{-z} \Psi(1, 1 + \alpha; z) \quad [2.7]$$

dengan $\alpha, z \in R, \alpha, z > 0$.

Dari definisi tersebut, diperoleh:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha, z) &= z^\alpha e^{-z} \Psi(1, 1 + \alpha; z) \\ &= z^\alpha e^{-z} \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^\infty e^{-zx} x^{1-1} (1+x)^{1+\alpha-1-1} dx \\ &= z^\alpha e^{-z} \frac{1}{1} \int_0^\infty e^{-zx} x^0 (1+x)^{\alpha-1} dx \\ &= z^\alpha e^{-z} \int_0^\infty e^{-zx} (1+x)^{\alpha-1} dx \end{aligned} \quad [2.8]$$

5. Fungsi Beta

Seperti halnya fungsi Gamma, fungsi Beta pertama kali ditemukan oleh Euler. Berikut definisi dari fungsi Beta:

Definisi II.C.6:

Menurut Beals dan Wong (2010), fungsi Beta didefinisikan:

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad [2.9]$$

untuk $a, b \in R, a > 0, b > 0$ dan $x \in R, 0 \leq x \leq 1$

$$\text{Fungsi Beta memenuhi sifat kesimetrisan } B(a, b) = B(b, a) \quad [2.10]$$

Bukti:

Dengan mengambil $t = 1 - x$, maka $x = 1 - t$ dan $dx = -dt$ diperoleh:

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx \\ &= \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{a-1} dt \\ &= B(b, a) \end{aligned}$$

Fungsi Beta erat kaitannya dengan fungsi Gamma. Keterkaitannya dapat dilihat dari identitas fungsi Beta yang disajikan dalam teorema berikut:

Teorema II.C.2:

Fungsi Beta $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ memenuhi identitas berikut untuk

$a > 0, b > 0$:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad [2.11]$$

Bukti:

Misal $u = \frac{x}{1-x}$, maka

$$x = u(1-x) \Leftrightarrow x = u - ux \Leftrightarrow x + ux = u \Leftrightarrow x(1+u) = u$$

$$\Rightarrow x = \frac{u}{1+u}, \text{ dan}$$

$$1-x = 1 - \frac{u}{1+u} = \frac{1+u}{1+u} - \frac{u}{1+u} = \frac{1+u-u}{1+u} = \frac{1}{1+u}$$

serta dimisalkan pula $v = 1 + u$, diperoleh $u = v - 1$, sehingga $x = \frac{v-1}{v}$,

dan turunan dari x terhadap u adalah:

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dv} \cdot \frac{dv}{du} = \frac{1}{v^2} \cdot 1 = \frac{1}{v^2} = \frac{1}{(1+u)^2}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{1+u}\right)^{a-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{b-1} \frac{du}{(1+u)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a-1+b-1}} \frac{du}{(1+u)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{u^a}{(1+u)^{a+b-2+2}} \frac{du}{u} \\ &= \int_0^\infty \frac{u^a}{(1+u)^{a+b}} \frac{du}{u} \end{aligned}$$

sedangkan

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \cdot y^{b-1} e^{-y} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^a}{x} e^{-x} \cdot \frac{y^b}{y} e^{-y} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} x^a y^b \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y(1+\frac{x}{y})} \frac{x^a}{y^a} y^a y^b \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Misal $u = \frac{x}{y} \Rightarrow du = \frac{1}{y} dx \Rightarrow \frac{y}{x} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{u} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$, maka:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y(1+u)} u^a y^{a+b} \frac{dy du}{y u}$$

dan misal $z = y(1+u) \Rightarrow dz = (1+u)dy \Rightarrow \frac{dz}{y(1+u)} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}$,

maka:

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z} u^a \left(\frac{z}{1+u}\right)^{a+b} \frac{dz du}{z u} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z} z^{a+b-1} dz \cdot u^a \left(\frac{1}{1+u}\right)^{a+b} \frac{du}{u} \\ &= \Gamma(a+b) \int_0^\infty u^a \left(\frac{1}{1+u}\right)^{a+b} \frac{du}{u} \\ &= \Gamma(a+b)B(a,b) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Contoh 6:

Hitung nilai dari $\int_0^1 x^4(1-x)^3 dx$

Jawab:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^4(1-x)^3 dx &= \int_0^1 x^{5-1}(1-x)^{4-1} dx \\ &= B(5,4) \\ &= \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)} \end{aligned}$$

$$= \frac{4! 3!}{8!}$$

$$= \frac{4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!} = \frac{1}{280}$$

D. Variabel Random Kontinu

1. Variabel Random

Sebuah populasi terdiri dari seluruh pengamatan yang terkait. Bagian dari populasi disebut sampel. Sedangkan kumpulan seluruh hasil kemungkinan dari sebuah percobaan statistik dikatakan sebagai ruang sampel dan dinotasikan dengan S .

Variabel random atau peubah acak merupakan hasil-hasil prosedur penyampelan random (*random sampling*) atau eksperimen random dari suatu data yang telah dianalisis secara statistik. Sampel random merupakan pengamatan yang dilakukan secara bebas satu sama lain dan acak. Variabel random dinyatakan dengan huruf besar, misal X , sedangkan nilai dari variabel random dinyatakan dengan huruf kecil dari variabel random tersebut, yaitu x .

Definisi II.D.1:

Menurut Walpole dan Myers (2007), variabel random adalah suatu fungsi yang mengaitkan sebuah bilangan real dengan masing-masing elemen dalam suatu ruang sampel.

Variabel random terbagi menjadi dua yaitu variabel random diskrit dan variabel random kontinu. Variabel random diskrit adalah variabel random

yang memiliki nilai yang dapat dicacah. Sedangkan variabel random kontinu adalah variabel random yang mengambil nilai pada sebarang nilai dalam suatu interval.

2. pdf (*Probability Density Function*) dan CDF (*Cumulative Distribution Function*) untuk Variabel Random Kontinu

Distribusi peluang variabel random kontinu dapat dinyatakan dalam bentuk rumus/ formula. Rumus tersebut diperlukan sebagai fungsi dari variabel random X dan dinotasikan dengan $f(x)$.

Definisi II.D.2:

Menurut Walpole dan Myers (2007), fungsi $f(x)$ adalah pdf dari variabel random kontinu X , yang didefinisikan atas himpunan semua bilangan real R , jika memenuhi:

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in R$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

Contoh 7:

Tunjukkan bahwa $f(x)$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

merupakan pdf dari variabel random kontinu X !

Jawab:

1. Dari fungsi di atas, jelas $f(x) > 0$
2.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 1 dx + \int_1^{\infty} 0 dx$$

$$= 0 + 1 + 0 = 1$$

Jadi terbukti bahwa $f(x)$ merupakan pdf dari X

Fungsi distribusi kumulatif sering disebut sebagai fungsi kumulatif yang dinotasikan dengan $F(x)$ untuk fungsi kontinu didefinisikan:

Definisi II.D.3:

Menurut Hogg, Kean, dan Craig (2005), sebuah variabel random kontinu X jika fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ adalah fungsi kontinu untuk setiap $x \in R$ maka variabel random kontinu dinyatakan:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Contoh 8:

Jika X suatu variabel random kontinu dengan fungsi kepadatan:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

tentukan fungsi kumulatifnya!

Jawab:

1. Untuk $x \leq 0$, maka:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

2. Untuk $0 < x < 1$, maka:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 2t dt \\ &= 0 + t^2 \Big|_0^x = x^2 \end{aligned}$$

3. Untuk $x \geq 1$, maka:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 2t dt + \int_1^{\infty} 0 dt \\ &= 0 + t^2 \Big|_0^1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi fungsi kumulatifnya adalah

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

3. Ekspektasi dan Variansi

Nilai ekspektasi variabel random X sangat penting dalam statistika karena mendeskripsikan letak dimana distribusi peluang berpusat. Namun mempelajari nilai ekspektasi saja tidak cukup, perlu dikaji pula nilai sebaran atau dikenal sebagai variansi. Di bawah ini diberikan definisi ekspektasi dan variansi dari variabel random kontinu X .

Definisi II.D.4 (Ekspektasi):

Diberikan X variabel random kontinu dengan pdf $f(x)$. Ekspektasi atau nilai ekspektasi dari X menurut Walpole dan Myers (2007) adalah:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad [2.12]$$

Definisi II.D.5 (Variansi):

Diberikan X variabel random kontinu dengan distribusi peluang $f(x)$ dan ekspektasi μ . Variansi dari X menurut Walpole dan Myers (2007) adalah:

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Teorema II.D.1:

Variansi dari variabel random X adalah:

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad [2.13]$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

4. Momen

Momen merupakan nilai harapan suatu gejala acak, misalkan; seorang penjudi yang tertarik mengetahui harapan kemenangannya dalam suatu permainan, seorang pedagang dalam harapan keuntungan dari produksinya, dan lain sebagainya. Berikut disajikan definisi momen untuk variabel random kontinu.

Definisi II.D.6:

Menurut Walpole dan Myers (2007), fungsi pembangkit momen dari variabel random kontinu X didefinisikan:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Jika fungsi pembangkit momen $M_X(t)$ ada, maka dapat dibangun momen ke r untuk semua $r = 1, 2, 3, \dots$

Definisi II.D.7:

Menurut Walpole dan Myers (2007), momen ke- r dari variabel random kontinu X diberikan:

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad [2.14]$$

E. Distribusi Gamma dan Distribusi Beta

1. Distribusi Gamma

Distribusi Gamma berasal dari fungsi Gamma yang didefinisikan:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

dengan $\alpha > 0$.

Misalkan t pada fungsi Gamma, merupakan variabel bergantung pada

variabel x dan θ , yaitu $t = \frac{x}{\theta}$, dengan $\theta > 0$, maka:

$$t = \frac{x}{\theta}$$

$$dt = \frac{1}{\theta} dx$$

menjadi

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{1}{\theta} dx$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$, diperoleh:

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{1}{\theta}}{\Gamma(\alpha)} dx$$

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \theta^{1-\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)} dx$$

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

Jadi pdf dari distribusi Gamma yang dinotasikan sebagai $X \sim GAM(\alpha, \theta)$

adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, & 0 < x < \infty \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases} \quad [2.15. a]$$

Jika $\theta = \frac{1}{\beta}$, maka pdf dari distribusi Gamma dengan parameter bentuk α

dan parameter skala β adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x, \alpha, \beta > 0 \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases} \quad [2.15. b]$$

Teorema II.E.1:

Ekspektasi dan variansi dari distribusi Gamma adalah:

$$\mu = \alpha \theta \text{ dan } \sigma^2 = \alpha \theta^2 \quad [2.16]$$

Bukti:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\ &= \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{1+\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\ &= \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{(1+\alpha)-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot \frac{\theta^{1+\alpha} \Gamma(\alpha+1)}{\theta^{1+\alpha} \Gamma(\alpha+1)} dx \\ &= \frac{\theta^{1+\alpha} \Gamma(\alpha+1)}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{(1+\alpha)-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot \frac{1}{\theta^{1+\alpha} \Gamma(\alpha+1)} dx \\ &= \frac{\theta^{1+\alpha} \Gamma(\alpha+1)}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot 1 \\ &= \frac{\theta^{1+\alpha} \alpha \Gamma(\alpha)}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \\ &= \alpha \theta \end{aligned}$$

Selanjutnya, sebelum mencari variansi, terlebih dahulu menentukan

$E(X^2)$:

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\
 &= \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{2+\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\
 &= \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{(\alpha+2)-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot \frac{\theta^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2)}{\theta^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2)} dx \\
 &= \frac{\theta^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2)}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{(\alpha+2)-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot \frac{1}{\theta^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2)} dx \\
 &= \frac{\theta^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2)}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot 1 \\
 &= \frac{\theta^{\alpha+2} (\alpha)_2 \Gamma(\alpha)}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \\
 &= \theta^2 (\alpha \cdot (\alpha + 1)) \\
 &= \theta^2 \alpha \cdot (\alpha + 1)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

sehingga diperoleh $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$\begin{aligned}
 &= \theta^2 \alpha \cdot (\alpha + 1) - (\alpha \theta)^2 \\
 &= \theta^2 \alpha \cdot (\alpha + 1) - \theta^2 \alpha \cdot (\alpha) \\
 &= \theta^2 \alpha \cdot (\alpha + 1 - \alpha) \\
 &= \theta^2 \alpha \cdot (1) \\
 &= \alpha \theta^2
 \end{aligned}$$

Persamaan [2.16] dan [2.17] merupakan perhitungan untuk distribusi Gamma dengan pdf pada persamaan [2.15.a], berakibat ekspektasi dan

variansi untuk distribusi Gamma dengan pdf pada persamaan [2.15.b]

berturut turut adalah:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \text{ dan } Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Selain itu, nilai dari $E(X^2) = \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1)}{\beta^2}$

2. Distribusi Beta

Definisi II.E.1:

Variabel random kontinu X dikatakan berdistribusi Beta dengan parameter α dan β jika pdf-nya diberikan:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Teorema II.E.2:

Ekspektasi dan variansi dari distribusi Beta dengan parameter α dan β diberikan:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad [2.18]$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad [2.19]$$

Bukti:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{(\alpha+1)-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha + 1, \beta) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}
\end{aligned}$$

Sebelum mencari variansi, terlebih dahulu menentukan $E(X^2)$:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^1 x^2 \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^2 \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{(\alpha+2)-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha + 2, \beta) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{(\alpha)_2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha + \beta)_2\Gamma(\alpha + \beta)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\alpha(\alpha + 1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}
\end{aligned}$$

[2.20]

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai variansi dari variabel random X :

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
 &= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 \\
 &= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha + \beta)^2} \\
 &= \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + \beta) - \alpha^2(\alpha + \beta + 1)}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\
 &= \frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha^2}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\
 &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}
 \end{aligned}$$

F. Distribusi Bersama

1. pdf Bersama

Jika X dan Y dua variabel random kontinu, distribusi peluang terjadinya secara serentak dapat dinyatakan dalam fungsi $f(x, y)$ dan biasanya $f(x, y)$ dinamakan pdf bersama dari X dan Y .

Definisi II.F.1:

Menurut Walpole dan Myers (2007), fungsi $f(x, y)$ adalah pdf bersama dari variabel random kontinu X dan Y jika:

- i) $f(x, y) \geq 0$, untuk setiap (x, y)

$$\text{ii) } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$\text{iii) } P[(X, Y)] = \int f(x, y) dx dy$$

Dari definisi mengenai pdf bersama dari dua variabel random kontinu di atas, dapat dibangun pdf bersama dari n variabel random. Fungsi $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dikatakan pdf bersama dari variabel random kontinu X_1, X_2, \dots, X_n jika:

$$\text{i) } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \text{ untuk setiap } (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{ii) } \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

$$\text{iii) } P[(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

2. pdf Marginal

Jika diberikan dua variabel random X dan Y , maka distribusi marginalnya dapat dilihat pada definisi berikut:

Definisi II.F.2:

Menurut Hogg, Kean, dan Craig (2005), distribusi marginal dari variabel random kontinu X dan Y masing-masing adalah:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \text{ dan } h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Namun jika diberikan X_1, X_2, \dots, X_n variabel random kontinu dengan pdf bersama $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka distribusi marginal dari X_1 (sebagai contoh) adalah:

$$g(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n$$

3. Variabel Random Saling Bebas

Variabel random X dan Y dikatakan saling bebas jika pdf bersamanya sama dengan perkalian pdf marginalnya.

Definisi II.F.3:

Diberikan X dan Y variabel random kontinu dengan pdf bersama (x, y) , dan pdf marginal berturut-turut $g(x)$ dan $h(y)$. Menurut Hogg, Kean, dan Craig (2005), variabel random X dan Y dikatakan bebas secara statistik jika dan hanya jika:

$$f(x, y) = g(x)h(y) \quad [2.21]$$

Definisi di atas yang merupakan definisi dua variabel random X dan Y yang saling bebas dapat diperluas hingga n variabel random seperti pada definisi berikut:

Definisi II.F.4:

Diberikan X_1, X_2, \dots, X_n merupakan n -variabel random kontinu dengan pdf bersama $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan distribusi marginal $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$.

Variabel random X_1, X_2, \dots, X_n dikatakan bebas jika hanya jika:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$$

4. Ekspektasi dan Produk Momen

Diberikan definisi ekspektasi, momen, dan kovarian dari variabel random X dan Y .

Definisi II.F.5 (Ekspektasi):

Diberikan X dan Y variabel random kontinu dengan pdf bersama $f(x, y)$.

Menurut Walpole dan Myers (2007), ekspektasi atau nilai ekspektasi dari variabel random $g(X, Y)$ adalah:

$$\mu_{g(X,Y)} = E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy \quad [2.22]$$

Jika variabel random kontinu X dan Y saling bebas, maka ekspektasi dari X dan Y adalah hasil kali dari nilai ekspektasi masing-masing variabel randomnya.

Teorema II.F.1:

Jika X dan Y variabel random kontinu saling bebas, maka

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Bukti:

Karena X dan Y saling bebas maka $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ dimana $g(x)$ dan $h(y)$ masing-masing merupakan pdf marginal dari variabel random dari X dan Y , diperoleh:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot g(x)h(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xg(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} yh(y) dy = E(X)E(Y) \blacksquare \end{aligned}$$

Definisi II.F.6 (Momen):

Menurut Walpole dan Myers (2007), produk momen ke- r dan ke- s dari variabel random kontinu X dan Y , dinotasikan dengan $\mu'_{r,s}$ adalah nilai ekspektasi dari $X^r Y^s$:

$$\mu'_{r,s} = E(X^r Y^s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s \cdot f(x, y) \, dx \, dy \quad [2.23]$$

Definisi II.F.7 (Kovarian):

Diberikan X dan Y variabel random kontinu dengan distribusi peluang bersama $f(x, y)$. Menurut Walpole dan Myers (2007), kovarian dari variabel random X dan Y adalah:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Teorema II.F.2:

Kovarian dari dua variabel random X dan Y dengan ekspektasi berturut-turut μ_X dan μ_Y diberikan:

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y \quad [2.24]$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xy - \mu_X y - \mu_Y x + \mu_X \mu_Y) f(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y) \, dx \, dy - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_X y f(x,y) \, dx \, dy - \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_Y x f(x,y) \, dx \, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_X \mu_Y f(x,y) \, dx \, dy \\
&= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y \\
&= E(XY) - \mu_X \mu_Y
\end{aligned}$$

5. Metode Transformasi Jacobian

Diberikan $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ adalah vektor dari variabel random kontinu dengan pdf bersama $f_X(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0$, dan $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ didefinisikan:

$$Y_i = u_i(X_1, X_2, \dots, X_k), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Menurut Bain dan Engelhardt (1992), jika Jacobian kontinu dan tak nol, maka pdf bersama dari Y adalah:

$$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_k) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_k) |J| \quad [2.26]$$

dimana $x = (x_1, \dots, x_k)$ adalah solusi dari $y = u(x)$ dengan

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_k} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_k}{\partial y_1} & \dots & & \frac{\partial x_k}{\partial y_k} \end{vmatrix}$$