

## **BAB II**

### **LANDASAN TEORI**

#### **A. Model Matematika**

##### **1. Pengertian**

###### **Definisi II.A.1:**

Model adalah gambaran (perwakilan) suatu obyek yang disusun dengan tujuan tertentu. (Susanta: 1989)

##### **2. Tujuan Penyusunan Model**

Tujuan penyusunan model adalah:

- a. Untuk mengenali perilaku obyek dengan cara mencari keterkaitan antara unsur-unsurnya.
- b. Mengadakan pendugaan (prediksi) untuk memperbaiki keadaan obyek
- c. Mengadakan optimisasi dalam obyek.

Jadi fungsi suatu model adalah menirukan/menggambarkan semirip mungkin perilaku/keadaan obyek yang diamati, sesuai dengan tujuan penyusunan model. (Susanta: 1989)

##### **3. Langkah-Langkah Penyusunan Model**

Langkah-langkah yang bisa ditempuh dalam penyusunan model matematika adalah sebagai berikut:

- a. Mengidentifikasi masalah yang sesungguhnya dan menyederhanakannya.

Di sini dicari semua peubah (yang kuantitatif) yang ada kaitannya dengan masalah dan dicari hubungan antar peubah tersebut.

b. Merumuskan masalah dalam bahasa matematika (menyusun model)

Pada langkah ini semua peubah dan relasi-relasinya dinyatakan dengan lambang matematika dan dicoba untuk mengenali pola masalah matematika yang sesuai dengan masalah tersebut.

c. Menyelesaikan masalah dalam model

Bila pola masalah dan alatnya sudah ada dalam khasanah matematika, langkah selanjutnya adalah menyelesaikannya dengan langsung. Tetapi terkadang polanya adalah baru sehingga perlu menciptakan alat yang baru pula, atau paling sedikit perlu menyesuaikan.

d. Menafsirkan kembali

Setelah penyelesaian secara matematika diperoleh, maka hasilnya harus ditafsirkan kembali.

e. Mengkaji penyelesaiannya

Hasil penafsiran kembali perlu dikaji apakah cukup sah dalam sistem semula. Hal ini dapat dikerjakan dengan cara mengadakan percobaan-percobaan atau simulasi. Bila ternyata hasilnya jauh menyimpang maka harus dikembalikan ke langkah 1) atau 2)

f. Pelaksanaan

Hasil yang sudah cukup sah, dapat dilaksanakan atau digunakan untuk mencapai tujuan semula. (Susanta: 1989)

Dalam studi ekologi, model adalah formulasi yang memberikan gambaran mengenai keadaan sebenarnya (*real word situation*). Karena populasi berubah-ubah sepanjang waktu maka dengan adanya model dimungkinkan untuk mengadakan ramalan-ramalan mengenai keadaan populasi yang bersangkutan untuk waktu-waktu tertentu. (Tarumingkeng: 1994)

## **B. Populasi**

### **1. Pengertian**

#### **Definisi II.B.1:**

Populasi adalah sehimpunan individu atau kelompok individu suatu jenis makhluk hidup yang tergolong dalam satu spesies (atau kelompok lain yang dapat melangsungkan interaksi genetik dengan jenis yang bersangkutan), dan pada suatu waktu tertentu menghuni suatu wilayah atau tata ruang tertentu. (Tarumingkeng: 1994)

#### **Definisi II.B.2:**

Demografi adalah ilmu statistika dan matematika yang mempelajari tentang ukuran, komposisi dan ruang distribusi populasi manusia, dan perubahan akhir waktu pada kelima aspek operasi, yaitu proses kelahiran, kematian, pernikahan, migrasi, dan perubahan sosial. (Brown, 1949:1)

## 2. Ukuran Dasar Demografi

Peristiwa demografis dapat diukur dengan berbagai cara diantaranya: rasio/proporsi, dan tingkat (*rates*)

### a. Rasio

#### Definisi II.B.3:

Rasio adalah bilangan yang menyatakan nilai relatif antara dua bilangan. (Nilakusmawati, 2009: 17)

Beberapa contoh rasio yang dipergunakan dalam demografi, yaitu:

#### i. Rasio Jenis Kelamin

Rasio jenis kelamin adalah perbandingan jumlah populasi jantan dalam kelompok umur  $i$  dengan jumlah populasi betina dalam kelompok umur  $i$  dihitung dengan rumus:

$$RJK = \frac{M_i}{F_i} \dots\dots\dots \text{(II.B.1)}$$

dengan

$RJK$  = rasio jenis kelamin

$M_i$  = jumlah populasi jantan (*male*) dalam kelompok umur  $i$

$F_i$  = jumlah populasi betina (*female*) dalam kelompok umur  $i$ ,

dengan  $i=1,2,3,\dots,n$

#### ii. Rasio Kepadatan Penduduk

Rasio kepadatan penduduk adalah perbandingan jumlah penduduk di wilayah  $i$  dengan jumlah luas wilayah (dalam  $\text{km}^2$  atau  $\text{mil}^2$ ), dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$RKP = \frac{P_i}{a_i} \quad \dots\dots\dots (II.B.2)$$

dengan

$RKP$  = rasio kepadatan penduduk

$P_i$  = jumlah penduduk wilayah  $i$

$a_i$  = jumlah luas wilayah  $i$  (dalam  $km^2$  atau  $mil^2$ ).

#### b. Tingkat (*Rates*)

Pada umumnya rasio/proporsi digunakan untuk menganalisa komposisi demografis dari kelompok penduduk, sedangkan tingkat (*rates*) digunakan untuk menganalisa peristiwa-peristiwa demografis dalam jenjang waktu tertentu.

Tingkat (*rates*) secara umum didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{tingkat peristiwa demografi tertentu} = \frac{\text{jumlah peristiwa yang terjadi dalam jenjang waktu tertentu}}{\text{jumlah kelompok penduduk yang mempunyai resiko (*population exposed to risk*) dalam peristiwa tersebut dalam jenjang waktu yang sama}}$$

### 3. Fertilitas

#### Definisi II.B.4:

Fertilitas dihubungkan dengan jumlah kelahiran hidup yang dipunyai oleh seorang wanita atau kelompok wanita. Suatu kelahiran disebut lahir hidup (*live birth*) apabila pada waktu lahir terdapat tanda-tanda kehidupan misalnya, bersuara, bernapas, dan jantung berdenyut. Apabila pada waktu lahir tidak ada tanda-tanda kehidupan disebut dengan lahir mati (*stiiil birth*). (Mantra, 1985:128)

**Definisi II.B.5:**

Fekunditas adalah kemampuan biologis wanita untuk menghasilkan anak lahir hidup. Seorang wanita yang secara biologis subur (*fecund*) tidak selalu melahirkan anak. (Nilakusmawati: 2009)

Ada beberapa pengukuran fertilitas populasi, yaitu:

a. Tingkat Fertilitas Kasar (*Crude Birth Rate*)**Definisi II.B.6:**

*Crude rate* adalah rasio dari jumlah pada kejadian penting yang terjadi dalam perumusan populasi dalam satu kalender tahun dengan jumlah populasi pada pertengahan tahun.

*Crude birth rate* untuk tahun  $i$  dirumuskan sebagai:

$$CBR = \frac{B}{P(i)}, i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{..... (II.B.3)}$$

dengan

$CBR$  = *Crude birth rate* atau tingkat fertilitas kasar

$B$  = angka kelahiran hidup pada tahun  $i$

$P(i)$  = populasi pada pertengahan tahun

b. Tingkat Fertilitas Umum (*General Fertility Rate*)**Definisi II.B.7:**

Tingkat Fertilitas Umum (*General Fertility Rate*) adalah membandingkan antara jumlah kelahiran hidup pada tahun tertentu dengan jumlah penduduk perempuan subur pada pertengahan tahun tersebut

$$GFR = \frac{B}{P_f} \quad \dots\dots\dots \text{(II.B.4)}$$

dengan:

$GFR = General\ Fertility\ Rate$  yaitu tingkat Fertilitas umum

$B$  = angka kelahiran hidup pada tahun  $i$

$P_f$  = Jumlah penduduk perempuan subur pada pertengahan tahun.

c. Tingkat Fertilitas Menurut Umur (*Age Spesific Fertility Rate*)

**Definisi II.B.8:**

Tingkat Fertilitas Menurut Umur (*Age spesific fertility rate*) didefinisikan dengan jumlah total angka kelahiran dalam kalender tahun yang dibagi oleh populasi pada tengah tahun. *Age spesific fertility rate* digunakan untuk menghitung tingkat fertilitas menurut umur populasi betina. Kemudian *Age spesific fertility rate* dirumuskan dengan

$$f_i = \frac{B_i}{F_i}, i = 1,2,3, \dots n \quad \dots\dots\dots \text{(II.B.5)}$$

dengan:  $f_i$  = tingkat fertilitas menurut umur

$B_i$  = angka kelahiran hidup dari betina pada tahun  $i$

$F_i$  = perkiraan jumlah populasi betina pada akhir tahun ke- $i$

(Brown, 1949: 28)

d. Tingkat Fertilitas Menurut Urutan Kelahiran (*Birth Order-Spesific Fertility Rate*)

Kemungkinan seseorang perempuan untuk menambah kelahiran tergantung kepada jumlah anak yang telah dilahirkan tersebut.

$$BOSFR = \frac{Bo_i}{P_f}, i = 1,2,3, \dots n \quad \text{..... (II.B.6)}$$

dengan:

$BOSFR$  = Tingkat fertilitas menurut urutan kelahiran

$Bo_i$  = Jumlah kelahiran urutan ke- $i$

$P_f$  = Jumlah penduduk perempuan subur pada pertengahan

(Nilakusumawati,2009 :94)

#### 4. Neraca Kehidupan (*Life Table*)

##### Definisi II.C.6:

*Life table* adalah tabel hipotetis dari sekumpulan populasi yang dilahirkan pada waktu yang sama (kohor) yang karena proses kematian, jumlahnya semakin lama semakin berkurang dan akhirnya habis.

Dalam ilmu sosial, kohor adalah sekelompok individu yang memiliki karakteristik atau pengalaman yang sama dalam periode tertentu (seperti waktu lahir, lulus sekolah, menikah, dan sebagainya.). Sehingga misalnya saja orang-orang yang lahir pada tahun 1980an akan membentuk suatu kohor kelahiran. Kelompok pembanding dapat berupa populasi umum yang merupakan asal dari kohor tersebut, atau dapat juga kohor lain yang

tampak seperti hanya memiliki sedikit kaitan dengan substansi yang dibahas tapi memiliki banyak kemiripan. Selain itu, sub kelompok dalam suatu kohor dapat dibandingkan satu sama lain. (Wikipedia: 2010)

Neraca kehidupan (*life table*) dapat memberikan informasi mengenai kelahiran (natalitas), kematian (mortalitas), dan peluang untuk berkembang biak, dan dari informasi ini diturunkan aproksimasi berbagai parameter perilaku perkembangan populasi. Neraca kehidupan dibuat berdasarkan beberapa asumsi, yaitu kohor hanya berkurang secara berangsur-angsur karena kematian dan tidak ada migrasi masuk dan keluar (*closed cohort*), kematian anggota kohor menurut pola tertentu pada berbagai tingkat umur, dan pada tingkat umur rata-rata individu meninggal mencapai pertengahan antara dua tingkat umur berturut-turut.

*Life table* merupakan sarana demografis yang serbaguna dan bermanfaat. Dengan tabel tersebut dapat ditentukan seberapa jauh kemungkinan individu dalam usia tertentu dapat mencapai usia tertentu atau bahkan juga meninggal pada umur tertentu, selain itu akan dapat diketahui pula probabilitas hidup atau kematian lain yang sifatnya lebih kompleks.

Dengan berpedoman pada populasi hewan yang hidup tidak terlalu lama secara eksperimental dapat diketahui berapa jumlah hewan yang masih hidup setelah beberapa interval waktu tertentu, demikian pula dari tabel tersebut dapat disusun *life table* yang lengkap.

*Life table* yang berisi data populasi yang masih hidup biasanya dimulai dari suatu umur tertentu dengan jumlah populasi tertentu yang

sudah terpilih pada umur itu. Jumlah populasi yang sudah terpilih pada umur pertama dalam tabel dinamakan radix tabel. Umur yang terpilih itu biasanya 0 tahun karena pada umumnya yang akan dihitung ialah jumlah populasi sejak lahir sampai meninggal. Walaupun demikian beberapa umur tertentu akan dipilih juga apabila hanya beberapa umur tertentu saja yang akan dihitung. Radix tabel di notasikan dengan  $l_0$ . (Pollar: 1984)

Komponen dasar dalam neraca kehidupan minimal meliputi:

- a.  $i$  yaitu waktu pengamatan yang dianggap sebagai kelas umur kohor dalam hari/bulan/tahun.
- b.  $a_i$  yaitu banyaknya individu populasi yang hidup pada setiap umur pengamatan. Pada komponen ini bisa diperluas lagi menjadi jumlah individu betina  $F_i$  dan individu jantan  $M_i$ .
- c.  $l_i$  yaitu peluang hidup atau *survivorship* yang didefinisikan dengan jumlah individu yang rata-rata dapat bertahan sampai hari ulang tahun berikutnya. Untuk  $l_0$  dinamakan radix tabel yaitu jumlah populasi yang sudah terpilih pada umur pertama dalam tabel.

Data peluang hidup dapat ditransformasikan ke dalam persen. Rumus peluang hidup betina adalah

$$l_i = \frac{F_i}{F_0} \quad \dots\dots\dots \text{(II.B.7)}$$

dimana

$l_i$  = peluang hidup (*survivorship*)

$F_i$  = jumlah individu betina yang hidup pada kelompok umur  $i$

$F_0$  = jumlah individu betina yang hidup pada kelompok umur awal  
(sebelumnya) yang terpilih

**Contoh II.C.1:**

Berikut adalah Tabel kehidupan suatu penduduk tahun 1980 untuk menghitung peluang hidup masing-masing kelas umur:

Tabel II.C.1: Peluang hidup untuk Perempuan, India 1961 - 1970

Umur ( $i$ )	Jumlah Populasi ( $F_i$ )	Peluang Hidup ( $l_i = \frac{F_i}{F_0}$ )
0	100.000	1
1	87.163	0,87
2	84.194	0,84
3	82.846	0,83
4	81.648	0,82
5	80.576	0,81
6	79.605	0,79
7	78.712	0,78
8	77.880	0,77
9	77.152	0,77

(sumber: [http://daps.bps.go.id/file\\_artikel/73/PROYEKSI%20PENDUDUK.pdf](http://daps.bps.go.id/file_artikel/73/PROYEKSI%20PENDUDUK.pdf))

Pada contoh II.C.1 kolom  $l_i$  digunakan untuk memecahkan problem mengenai proporsi populasi penduduk mulai dari lahir sampai mati. Untuk menghitung  $l_i$  yang tidak diketahui dari lahir sampai mati, maka digunakan perbandingan populasi dari kelompok umur tersebut dengan kelompok umur yang lebih rendah yang diketahui

**Contoh II.C.2:**

Penduduk wanita pada suatu daerah yang berusia 31 tahun adalah sebanyak 94.577 orang. Dari 94.577 orang wanita terdapat 93.931 wanita yang dapat bertahan sampai usia 35 tahun. Hitung berapa peluang hidup wanita yang berumur 31 tahun yang bertahan hidup sampai berumur 35 tahun.

**Penyelesaian:**

Dari  $F_{31}$  atau 94.577 wanita yang hidup pada umur 31 tahun, ternyata  $F_{35}$  atau 93.931 diantaranya dapat hidup sampai berumur 35 tahun. Dengan demikian peluang hidup wanita dari umur 31 tahun sampai 35 tahun ialah:

$$l = \frac{F_{35}}{F_{31}} = \frac{93.931}{94.577} = 0,99317$$

(Pollard: 1984)

- d.  $d_i$  adalah jumlah kematian antara umur  $i$  dan  $i + 1$ . Rumus mencari  $d_i$  adalah sebagai berikut:

$$d_i = l_i - l_{i+1} \quad \text{..... (II.B.8)}$$

- e.  $q_i$  yaitu kemungkinan mati antara umur  $i$  dan  $i + 1$ . Rumus untuk mencari  $q_i$  adalah sebagai berikut:

$$q_i = \frac{d_i}{F_i} \quad \text{..... (II.B.9)}$$

dengan:

$q_i$  = kemungkinan mati antara umur  $i$  dan  $i + 1$

$d_i$  = jumlah kematian antara umur  $i$  dan  $i + 1$

$F_i$  = jumlah individu betina yang hidup pada kelompok umur  $i$

- f.  $L_i$  adalah jumlah rata-rata individu betina pada kelompok umur awal dan kelompok umur berikutnya.  $L_i$  dapat dihitung dengan rumus:

$$L_i = \frac{l_i + l_{i+1}}{2} \quad \text{..... (II.B.10)}$$

Untuk tahun pertama kehidupan tidak digunakan rata-rata  $l_i$  dan  $l_{i+1}$  sebagai pendekatan besarnya  $L_i$ , karena angka kematian tinggi dan tidak tersebar rata terjadi pada tahun pertama kehidupan, sehingga besarnya  $L_1$  dan  $L_2$  dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0,3l_1 + 0,7l_2 \\ L_2 &= 0,4l_2 + 0,6l_3 \quad \text{..... (II.B.11)} \end{aligned}$$

Untuk  $L_3$  dan umur yang lebih besar digunakan rumus  $L_i$  di atas. (Nilakusumawati: 2009)

### Contoh II.C.3:

Berikut adalah contoh neraca kehidupan (*life table*) penduduk secara lebih lengkap:

Tabel II.C.2: Neraca Kehidupan (*life table*) untuk Perempuan, India 1961 - 1970

( $i$ )	( $F_i$ )	( $l_i$ )	( $q_i$ )	( $d_i$ )	( $L_i$ )
0	100.000	1	0,128	12.837	0,910
1	87.163	0,87	0,034	2.969	0,853
2	84.194	0,84	0,016	1.348	0,835
3	82.846	0,83	0,145	1.198	0,822
4	81.648	0,82	0,013	1.072	0,811
5	80.576	0,81	0,012	971	0,800
6	79.605	0,79	0,011	893	0,791
7	78.712	0,78	0,010	832	0,783
8	77.880	0,77	0,006	728	0,775
9	77.152	0,77	0,008	657	0,768

(sumber: [http://daps.bps.go.id/file\\_artikel/73/PROYEKSI%20PENDUDUK.pdf](http://daps.bps.go.id/file_artikel/73/PROYEKSI%20PENDUDUK.pdf))

## C. Matriks

### 1. Pengertian Matriks

#### Definisi II.C.1:

Sebuah *matriks* adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan *entri* dalam matriks.

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horisontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Suatu matriks dengan hanya satu kolom disebut matriks kolom atau vektor kolom dan suatu matriks dengan hanya satu baris disebut matriks baris atau vektor baris.

Anggota pada baris  $i$  dan kolom  $j$  dari sebuah matriks  $A$  akan dinyatakan sebagai  $a_{ij}$ . Matriks dinotasikan dengan huruf kapital  $A$ ,  $B$ ,  $K$ , dan sebagainya. Bentuk matriks secara umum,

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Anggota suatu matriks berindeks rangkap, misalnya pada matriks  $A$  di atas  $a_{12}$  menyatakan anggota matriks  $A$  pada baris ke-1 dan kolom ke-2, sedangkan matriks  $A$  berordo  $m \times n$  di tulis  $A_{m \times n}$ .

**Contoh II.C.1:**

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Baris ke-1 kolom ke-1 ( $p_{1,1}$ ) = 2

Baris ke-1 kolom ke-2 ( $p_{1,2}$ ) = 5

Baris ke-1 kolom ke-3 ( $p_{1,3}$ ) = 4

Baris ke-2 kolom ke-1 ( $p_{2,1}$ ) = 1

Baris ke-2 kolom ke-2 ( $p_{2,2}$ ) = 7

Baris ke-2 kolom ke-3 ( $p_{2,3}$ ) = 3

**2. Macam-macam matriks**

Macam-macam matriks diantaranya sebagai berikut:

**a. Matriks persegi****Definisi II.C.2**

Suatu matriks disebut matriks persegi, jika banyaknya baris dan banyaknya kolom sama. Disebut juga matriks persegi berorde  $n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Contoh II.C.2 :**

Matriks persegi 3 x 3

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Pada matriks persegi unsur-unsur yang terletak pada garis penghubung

$a_{11}$  dengan  $a_{nn}$  dinamakan diagonal utama.

Pada contoh, diagonal utamanya adalah 1, 4, 6

## b. Matriks Identitas

### Definisi II.C.3

Matriks identitas adalah suatu matriks persegi dimana anggota-anggotanya mempunyai nilai 1 pada diagonal utama dan 0 pada anggota selain diagonal utamanya.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

### Contoh II.C.3:

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika  $A$  adalah sebuah matriks persegi dari ordo  $n$  dan  $I$  adalah matriks identitas dari ordo  $n$ , maka  $I$  komutatif dengan  $A$ :

$$IA = AI = A \quad \dots\dots\dots \text{(II.C.1)}$$

(Hadley: 1992)

## c. Matriks Diagonal

### Definisi II.C.3

Suatu matriks persegi dimana semua anggota di luar diagonal utama mempunyai nilai 0 dan paling tidak satu anggota pada diagonal utama  $\neq 0$ , biasanya diberi simbol  $D$ .

### Contoh II.C.4 :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

### 3. Operasi Matriks

#### a. Penjumlahan matriks

##### Definisi II.C.4

Jika A dan B adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah  $A+B$  adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota B dengan anggota-anggota A yang bersesuaian. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak bisa ditambahkan.

##### Contoh II.C.5:

Diberikan matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Maka :

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + 5 & 3 + (-1) \\ 1 + 2 & 5 + (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Sedang  $A+C$  dan  $B+C$  tidak didefinisikan karena matriks C ukurannya berbeda dengan matriks A dan matriks B.

#### b. Perkalian skalar dengan matriks

##### Definisi II.C.5

Jika A adalah sebarang matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*)  $cA$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A dengan c. (Anton: 1987)

**Contoh II.C.6:**

Diberikan matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

maka

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 14 & 18 & 2 \end{bmatrix}$$

dan

$$(-1)A = -1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -7 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

**c. Pengurangan Matriks**

Jika B sebarang matriks, maka  $-B$  akan menyatakan hasil kali  $(-1)B$ . Jika A dan B adalah dua matriks yang ukurannya sama, maka  $A - B$  didefinisikan sebagai jumlah  $A + (-B) = A + (-1)B$ .

**Contoh II.C.7:**

Diberikan matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Dari definisi-definisi di atas maka

$$-B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

dan

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

jadi  $A - B$  dapat diperoleh secara langsung dengan mengurangi anggota B dari anggota A yang bersesuaian.

#### d. Perkalian matriks dengan matriks

##### Definisi II.C.6:

Jika A adalah sebuah matriks  $m \times r$  dan B adalah sebuah matriks  $r \times n$ , maka hasil kali AB adalah matriks  $m \times n$  yang anggota-anggotanya didefinisikan sebagai berikut: untuk mencari anggota dalam baris i dalam kolom j dari AB, pilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan anggota-anggota yang bersesuaian dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya. (Anton: 1987)

##### Contoh II.C.8 :

Diberikan matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena A adalah matriks  $2 \times 3$  dan B adalah matriks  $3 \times 4$ , maka hasil kali AB adalah sebuah matriks  $2 \times 4$ .

$$AB = \begin{bmatrix} (1.4) + (2.0) + (4.2) & (1.1) + (2.(-1)) + (4.7) & (1.4) + (2.3) + (4.5) & (1.3) + (1.2) + (4.2) \\ (2.4) + (6.0) + (0.2) & (2.1) + (6.(-1)) + (0.7) & (2.4) + (6.3) + (0.5) & (2.3) + (6.1) + (0.2) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

#### 4. Determinan

Sebelum mendefinisikan determinan, akan ditetapkan beberapa hal terkait permutasi

##### Definisi II.C.7:

*Permutasi* himpunan bilangan-bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, n\}$  adalah susunan bilangan-bilangan bulat ini menurut suatu aturan tanpa menghilangkan atau mengulagi beilangan-bilangan tersebut. (Anton:1987)

##### Contoh II.C.9:

Ada enam permutasi yang berbeda dari himpunan bilangan-bilangan bulat  $\{1, 2, 3\}$ . Permutasi-permutasi ini adalah

$$\begin{array}{ccc} (1, 2, 3) & (2, 1, 3) & (3, 1, 2) \\ (1, 3, 2) & (2, 3, 1) & (3, 2, 1) \end{array}$$

Pada umumnya himpunan  $\{1, 2, \dots, n\}$  mempunyai  $n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!$  permutasi yang berbeda. Untuk menyatakan permutasi umum dari himpunan  $\{1, 2, \dots, n\}$ , dapat ditulis  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  dimana  $j_1$  adalah bilangan bulat pertama dalam permutasian,  $j_2$  adalah bilangan bulat kedua dan seterusnya.

Pembalikan (invers) adalah suatu urutan bilangan besar mendahului bilangan yang lebih kecil. Sedangkan jumlah pembalikan adalah banyaknya bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil. Lebih lengkapnya perhatikan contoh di bawah ini.

**Contoh II.C.10:**

Hasil suatu permutasi adalah (6, 1, 4, 3, 2, 5)

- bilangan 6, mendahului bilangan 1,2,3,4, dan 5, sehingga ada 5 pembalikan.
  - bilangan 5, tidak mendahului
  - bilangan 4, mendahului 3,2 sehingga ada 2 pembalikan
  - bilangan 3, mendahului 2, sehingga ada satu pembalikan
  - bilangan 2, tidak mendahului, begitu juga bilangan 1
- jadi jumlah pembalikannya adalah  $5 + 2 + 1 = 8$  pembalikan

**Definisi II.C.8:**

Sebuah permutasi dinamakan *genap (even)* jika jumlah invers seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang genap dan dinamakan *ganjil (odd)* jika jumlah invers seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang ganjil. (Anton: 1987)

**Contoh II.C.11:**

Tabel berikut mengklasifikasikan berbagai permutasi dari {1, 2, 3} sebagai genap dan ganjil

Permutasi	Jumlah Pembalikan	Klasifikasi
(1, 2, 3)	0	genap
(1, 3, 2)	1	ganjil
(2, 1, 3)	1	ganjil
(2, 3, 1)	2	genap
(3, 1, 2)	2	genap
(3, 2, 1)	3	ganjil

Jika suatu matriks berukuran  $n \times n$ , maka perkalian dasarnya terdiri dari  $n$  elemen yaitu

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$$

sedangkan banyaknya perkalian dasar adalah  $n!$  yaitu banyaknya permutasi yang diisikan pada  $j$  dan tanda positif atau negatif tergantung dari hasil pembalikan, jika permutasi genap bertanda positif dan sebaliknya permutasi ganjil bertanda negatif.

**Contoh II.C.12:**

Hitung determinan dari matriks persegi  $A$  berukuran  $2 \times 2$ , misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Perhatikan tabel berikut:

Permutasi	Hasil Kali Dasar	Pembalikan	Hasil Kali Dasar Bertanda
(1,2)	$a_{11}a_{22}$	Genap	$a_{11}a_{22}$
(2,1)	$a_{12}a_{21}$	Ganjil	$-a_{12}a_{21}$

sehingga

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**Contoh II.C.13:**

Hitung determinan dari matriks persegi  $A$  berukuran  $3 \times 3$ , misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Perhatikan tabel berikut:

Permutasi	Hasil Kali Dasar	Pembalikan	Hasil Kali Dasar Bertanda
(1,2,3)	$a_{11}a_{22}a_{33}$	Genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
(1,3,2)	$a_{11}a_{223}a_{332}$	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
(2,1,3)	$a_{12}a_{21}a_{33}$	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
(2,3,3)	$a_{12}a_{23}a_{31}$	Genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
(3,1,2)	$a_{13}a_{21}a_{32}$	Genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
(3,2,1)	$a_{13}a_{22}a_{31}$	Ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Sehingga

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

#### Contoh II.C.14:

Hitung determinan dari matriks persegi  $A$  berukuran  $3 \times 3$ , misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Perhatikan tabel berikut:

Permutasi	Hasil Kali Dasar	Pembalikan	Hasil Kali Dasar Bertanda
(1,2,3)	2,1,3	Genap	6
(1,3,2)	2,5,2	Ganjil	-20
(2,1,3)	4,4,3	Ganjil	-48
(2,3,3)	4,5,6	Genap	120
(3,1,2)	3,4,2	Genap	24
(3,2,1)	3,1,6	Ganjil	-18

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 64$$

**Definisi II.C.10:**

Determinan A ditulis secara simbolis sebagai berikut:

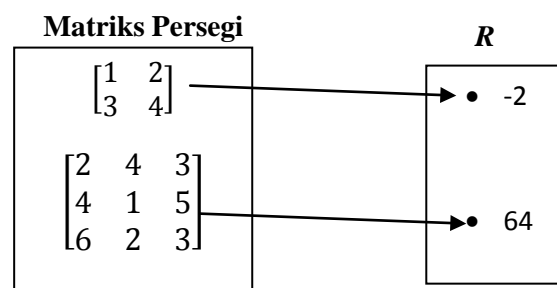
$$\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad \dots \dots \text{(II.C.4)}$$

dimana  $\sum$  menunjukkan bahwa suku-suku tersebut harus dijumlahkan terhadap semua permutasi  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  dan simbol + atau - dapat dipilih dalam masing-masing suku sesuai dengan apakah permutasi itu genap atau ganjil. (Anton: 1987)

**Definisi II.C.11:**

*Fungsi determinan* merupakan fungsi yang memasangkan suatu matriks persegi sebagai daerah asal dengan suatu bilangan real  $R$  dengan aturan  $\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$

**Contoh. II. C. 15**



## 5. Nilai Eigen Dan Vektor Eigen

### Definisi II.C.12:

Jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$ , maka vektor tak nol  $x$  di dalam  $R^n$  dinamakan **vektor eigen (eigen vector)** dari  $A$  jika  $Ax$  adalah kelipatan skalar dari  $x$ ; yakni,

$$Ax = \lambda x, \text{ untuk suatu skalar } \lambda \quad \dots\dots \text{(II.C.5)}$$

Skalar  $\lambda$  dinamakan **nilai eigen (eigenvalue)** dari  $A$  dan  $x$  dikatakan vektor eigen **yang bersesuaian** dengan  $\lambda$ . (Anton: 1989)

### Contoh II.C.16:

Vektor  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  adalah vektor eigen dari  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$  yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda=3$  karena

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

Untuk mencari nilai eigen matriks  $A$  yang berukuran  $n \times n$ , maka dapat dituliskan kembali  $Ax=\lambda x$  sebagai

$$Ax = \lambda Ix$$

$$\Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0 \quad \dots\dots \text{(II.C.6)}$$

Supaya  $\lambda$  menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan ini dan akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika  $\det(\lambda I - A) = 0$ .  $\det(\lambda I - A) = 0$  dinamakan **persamaan karakteristik**  $A$ ; skalar yang memenuhi persamaan tersebut adalah nilai eigen dari  $A$ . Bila

diperluas, maka determinan  $\det(\lambda I - A)$  adalah polinom  $\lambda$  yang dinamakan *polinom karakteristik* dari  $A$ .

Jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$ , maka polinom karakteristik  $A$  harus memenuhi  $n$  dan koefisien  $\lambda^n$  adalah 1. Sehingga polinom karakteristik dari matriks  $n \times n$  mempunyai bentuk

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n \quad \text{..... (II.C.7)}$$

**Contoh II.C.17:**

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

**Penyelesaian:**

$$\text{Karena } \lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Maka polinom karakteristik dari  $A$  adalah  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

Pemecahan-pemecahan persamaan ini adalah  $\lambda = 1$  dan  $\lambda = 2$ ; inilah nilai-nilai eigen dari  $A$

#### D. Matriks Leslie

Matriks Leslie merupakan model mengenai pertumbuhan populasi yang paling lazim digunakan para ahli kependudukan yang dikembangkan sekitar tahun 1940-an. Model ini menjelaskan pertumbuhan banyaknya betina dari populasi manusia atau hewan. Dalam model ini, yang betina dibagi atas kelompok umur yang kurun waktunya sama. (Anton: 1987:143).

Matriks Leslie selain digunakan untuk menghitung pertumbuhan populasi juga dapat digunakan untuk menyelesaikan pemanenan populasi hewan yang dapat dibenarkan dan menyelidiki efek pemanenan banyaknya bagian yang berbeda-beda dari golongan umur yang berbeda-beda.

### 1. Interval Umur

Misalkan  $n$  adalah umur maksimum yang dapat dicapai oleh betina pada suatu populasi. Apabila populasi itu dibagi ke dalam  $i$  kelompok berdasarkan umur (dengan  $i=1,2,3,\dots,n$ ), maka jarak interval masing-masing kelompok adalah  $\frac{n}{i}$ . Sehingga diperoleh:

- Kelompok 1, adalah mereka yang berumur  $[0, \frac{n}{i})$
- Kelompok 2 adalah mereka yang berumur  $[\frac{n}{i}, \frac{2n}{i})$
- Kelompok 3 adalah mereka yang berumur  $[\frac{2n}{i}, \frac{3n}{i})$ , dan seterusnya
- Kelompok  $i$  adalah mereka yang berumur  $[\frac{(i-1)n}{i}, n]$ .

### 2. Vektor Distribusi Umur

#### Definisi II.D.1:

Vektor distribusi umur  $x^{(k)}$  pada waktu  $t_k$  didefinisikan dengan

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_i^{(k)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots \text{(II.D.1)}$$

dengan entri  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_i^{(k)}$ , adalah banyaknya betina pada kelompok  $i$  pada waktu  $t_k$ .

Jika  $k = 0$ , maka vektor  $x^{(0)}$  disebut vektor distribusi mula-mula, yaitu:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_i^0 \end{bmatrix}$$

### 3. Membentuk Matriks Leslie

Pada proses kelahiran dan kematian diantara dua waktu pengamatan yang berturut-turut menggunakan parameter demografis sebagai berikut:

- $a_i$  adalah jumlah rata-rata banyaknya anak betina yang dilahirkan oleh seekor induk selama berada dalam kelompok umur  $i$ , dengan  $i=1,2,\dots,n$ .
- $b_i$  adalah peluang survival, yaitu banyaknya betina dalam kelompok umur ke- $i$  yang dapat diharapkan masih hidup sehingga mampu masuk ke dalam kelompok  $i+1$ , dengan  $i=1,2,\dots,n-1$

sehingga diperoleh bahwa:

$$a_i \geq 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n$$

$$0 \leq b_i \leq 1 \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n - 1$$

jadi  $b_i$  tidak boleh sama dengan nol, karena jika sama dengan nol maka berarti tidak ada betina yang masih hidup sesudah kelompok umur ke- $i$ . Sedangkan untuk  $a_i$  dianggap sedikitnya ada satu  $a_i$  yang bernilai positif sehingga akan terjadi kelahiran. Setiap kelompok umur dimana nilai  $a_i$  yang bersangkutan adalah positif dinamakan kelompok umur subur (*fertile age class*).  $a_i$  dan  $b_i$  dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$a_i = \frac{L_0}{l_0} \left( \frac{1}{2} f_i^f + \frac{1}{2} \frac{L_{i+1}}{L_i} f_{i+1}^f \right), i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \dots\dots \text{(II.D.2)}$$

$$b_i = \frac{L_{i+1}}{L_i}, i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \dots\dots \text{(II.D.3)}$$

(Brown: 1949)

dimana:

$L_i$  adalah jumlah rata-rata individu pada kelompok umur  $i$  dan kelompok

umur berikutnya,  $i+1$ .  $L_i$  dihitung dengan rumus  $L_i = \frac{l_i + l_{i+1}}{2}$

$l_i$  adalah peluang hidup atau *survivorship*

$f_i^f$  adalah tingkat fertilitas menurut umur atau disebut juga laju kelahiran betina yang berada pada kelompok usia ke- $i$ , dihitung dengan menggunakan

rumus persamaan  $f_i = \frac{B_i}{F_i}$

$x_i^{(k)}$  pada persamaan vektor distribusi adalah banyaknya betina dalam kelompok umur ke- $i$  pada waktu  $t_k$ . Pada waktu  $t_k$ , betina-betina dalam kelompok umur pertama adalah anak dari betina-betina yang lahir diantara waktu  $t_{k-1}$  dan  $t_k$ . Jadi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{banyaknya} \\ \text{betina} \\ \text{dalam kelompok} \\ \text{1 pada waktu } t_k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{banyaknya} \\ \text{anak yang} \\ \text{dilahirkan oleh} \\ \text{betina dalam} \\ \text{kelompok 1 antara} \\ \text{waktu } t_{k-1} \\ \text{dan waktu } t_k \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{banyaknya} \\ \text{anak yang} \\ \text{dilahirkan oleh} \\ \text{betina dalam} \\ \text{kelompok 2 antara} \\ \text{waktu } t_{k-1} \\ \text{dan waktu } t_k \end{array} \right\} + \dots + \left\{ \begin{array}{l} \text{banyaknya} \\ \text{anak yang} \\ \text{dilahirkan oleh} \\ \text{betina dalam} \\ \text{kelompok } n \text{ antara} \\ \text{waktu } t_{k-1} \\ \text{dan waktu } t_k \end{array} \right\}$$

atau dapat ditulis dengan:

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \dots + a_n x_n^{(k-1)} \quad \dots\dots\dots \text{(II.D.4)}$$

atau 
$$x_1^{(k)} = \sum_{i=1}^n a_i x_i^{(k-1)}$$

$b_i$  merupakan faktor *survivorship* atau banyaknya betina dalam kelompok umur ke- $i$  yang dapat diharapkan masih hidup dan sampai pada kelompok umur ke- $(i+1)$ . Maka banyaknya betina dalam kelompok umur ke- $i+1$ , dengan  $i=1,2,\dots,n-1$  pada waktu  $t_k$  adalah betina dalam kelompok ke- $i$  pada waktu  $t_{k-1}$  yang masih hidup pada waktu  $t_k$ . Jadi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{banyaknya} \\ \text{betina dalam} \\ \text{kelompok } i + 1 \\ \text{pada waktu } t_k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{jumlah} \\ \text{betina dalam} \\ \text{kelompok } i \\ \text{yang hidup sampai} \\ \text{ke kelompok } i+1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{banyaknya} \\ \text{betina dalam} \\ \text{kelompok } i \\ \text{pada waktu } t_{k-1} \end{array} \right\}$$

atau dapat ditulis sebagai:

$$x_{i+1}^{(k)} = \sum_{i=1}^n b_i x_i^{(k-1)}, \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad \dots\dots\dots \text{(II.D.5)}$$

dengan :

$x_{i+1}^{(k)}$  = banyaknya individu betina pada kelompok umur ke  $i+1$  untuk jangka waktu  $k$  tahun yang akan datang.

$x_i^{(k-1)}$  = banyaknya individu betina pada kelompok umur ke- $i$  untuk jangka waktu  $k-1$  tahun yang akan datang.

Persamaan (II.D.5) dapat dijabarkan menjadi

$$x_{i+1}^{(k)} = b_1 x_1^{(k-1)} + b_2 x_2^{(k-1)} + b_3 x_3^{(k-1)} + \dots + b_{(n-1)} x_{(n-1)}^{(k-1)} \quad \dots\dots\dots \text{(II.D.6)}$$

dengan  $x_{i+1}^{(k)}$  merupakan banyaknya individu betina pada kelompok umur ke- $i+1$  untuk jangka waktu  $k$  tahun yang akan datang.

Untuk  $i=1$ , maka:

$$x_2^{(k)} = b_1 x_1^{(k-1)} + 0x_2^{(k-1)} + 0x_3^{(k-1)} \dots + 0x_{(n-1)}^{(k-1)} \quad \dots\dots\dots \text{(II.D.7)}$$

Nilai  $b_2, b_3, \dots, b_{n-1} = 0$  karena untuk menghitung jumlah populasi betina pada kelompok umur ke-2, hanya bergantung pada peluang tahan hidup dan jumlah individu pada kelompok umur sebelumnya yaitu jumlah populasi dan peluang hidup pada kelompok umur ke-1.

Untuk  $i = 2$  maka :

$$x_3^{(k)} = 0x_1^{(k-1)} + b_2x_2^{(k-1)} + 0x_3^{(k-1)} \dots + 0x_{(n-1)}^{(k-1)} \quad \dots\dots\dots \text{(II.D.8)}$$

Nilai  $b_1, b_3, \dots, b_{n-1} = 0$  karena untuk menghitung jumlah populasi betina pada kelompok umur ke-3, hanya bergantung pada peluang tahan hidup dan jumlah individu pada kelompok umur sebelumnya yaitu jumlah populasi dan peluang hidup pada kelompok umur ke-2.

Untuk  $i = 3$  maka :

$$x_4^{(k)} = 0x_1^{(k-1)} + 0x_2^{(k-1)} + b_3x_3^{(k-1)} + \dots + 0x_{(n-1)}^{(k-1)} \quad \dots\dots\dots \text{(II.D.8)}$$

Nilai  $b_1, b_2, b_4, b_5, \dots, b_{n-1} = 0$  karena untuk menghitung jumlah populasi betina pada kelompok umur ke-3, hanya bergantung pada peluang tahan hidup dan jumlah individu pada kelompok umur sebelumnya yaitu jumlah populasi dan peluang hidup pada kelompok umur ke-2.

Untuk  $i = n-1$  maka :

$$x_i^{(k)} = 0x_1^{(k-1)} + 0x_2^{(k-1)} + 0x_3^{(k-1)} \dots + b_{(i-1)}x_{(i-1)}^{(k-1)} \quad \dots\dots\dots \text{(II.D.9)}$$

Nilai  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{i-2} = 0$  karena untuk menghitung jumlah populasi betina pada kelompok umur ke-( $i-1$ ), hanya bergantung pada peluang tahan hidup

dan jumlah individu pada kelompok umur sebelumnya yaitu jumlah populasi dan peluang hidup pada kelompok umur ke-( $n-2$ ).

Oleh karena itu dari persamaan (II.D.4) dan persamaan (II.D.5) diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 x_1^{(k)} &= a_1x_1^{(k-1)} + a_2x_2^{(k-1)} + a_3x_3^{(k-1)} + \dots + a_ix_i^{(k-1)} \\
 x_2^{(k)} &= b_1x_1^{(k-1)} + 0x_2^{(k-1)} + 0x_3^{(k-1)} + \dots + 0x_{(i-1)}^{(k-1)} \\
 x_3^{(k)} &= 0x_1^{(k-1)} + b_2x_2^{(k-1)} + 0x_3^{(k-1)} + \dots + 0x_{(i-1)}^{(k-1)} \\
 x_4^{(k)} &= 0x_1^{(k-1)} + 0x_2^{(k-1)} + b_3x_3^{(k-1)} + \dots + 0x_{(i-1)}^{(k-1)} \\
 &\vdots \\
 x_i^{(k)} &= 0x_1^{(k-1)} + 0x_2^{(k-1)} + 0x_3^{(k-1)} + \dots + b_{(i-1)}x_{(i-1)}^{(k-1)} \dots\dots \text{(II.D.10)}
 \end{aligned}$$

persamaan (II.D.10) di atas dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x_1^{(k-1)} + a_2x_2^{(k-1)} + a_3x_3^{(k-1)} + \dots + a_ix_i^{(k-1)} \\ b_1x_1^{(k-1)} + 0x_2^{(k-1)} + 0x_3^{(k-1)} + \dots + 0x_{(i-1)}^{(k-1)} \\ 0x_1^{(k-1)} + b_2x_2^{(k-1)} + 0x_3^{(k-1)} + \dots + 0x_{(i-1)}^{(k-1)} \\ 0x_1^{(k-1)} + 0x_2^{(k-1)} + b_3x_3^{(k-1)} + \dots + 0x_{(i-1)}^{(k-1)} \\ \vdots \\ 0x_1^{(k-1)} + 0x_2^{(k-1)} + 0x_3^{(k-1)} + \dots + b_{(i-1)}x_{(i-1)}^{(k-1)} \end{bmatrix} \dots\text{(II.D.11)}$$

Dari persamaan linear II.D.11 dapat dibentuk ke dalam persamaan matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{i-1} & a_i \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{i-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad \text{..... (II.D.12)}$$

Matriks  $\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$  dinotasikan dengan  $x_i^{(k)}$ ,

matriks  $\begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$  dinotasikan dengan  $x_i^{(k-1)}$ ,

sedangkan matriks  $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{i-1} & a_i \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{i-1} & 0 \end{bmatrix}$  dinotasikan dengan  $A$

Matrik  $A$  disebut matrik Leslie.

persamaan matriks II,D,12 dapat ditulis dengan

$$x_i^{(k)} = Ax_i^{(k-1)}$$

Dengan menggunakan rumus  $a_i$  dan  $b_i$  maka matriks Leslie dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{l_1} \left( \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} \frac{L_2}{L_1} f_2 \right) & \frac{L_1}{l_1} \left( \frac{1}{2} f_2 + \frac{1}{2} \frac{L_3}{L_2} f_3 \right) & \frac{L_1}{l_1} \left( \frac{1}{2} f_3 + \frac{1}{2} \frac{L_4}{L_3} f_4 \right) & \cdots & \frac{L_1}{l_1} \left( \frac{1}{2} f_{i-1} + \frac{1}{2} \frac{L_i}{L_{i-1}} f_i \right) & \frac{L_1}{l_1} \left( \frac{1}{2} f_i + \frac{1}{2} \frac{L_{i+1}}{L_i} f_{i+1} \right) \\ \frac{L_2}{L_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_3}{L_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{L_i}{L_{i-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

..... (II.D.13) (Anton: 1987)

#### 4. Laju Reproduksi Bersih (*Net Reproduction Rate*)

Matriks Leslie dapat menentukan distribusi umur betina pada waktu yang akan datang, namun persamaan matriks Leslie tersebut tidak memberikan gambaran umum tentang dinamika proses pertumbuhan tersebut. Oleh karena akan ditentukan nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari matriks Leslie tersebut untuk memberikan gambaran secara umum. Nilai-nilai eigen dari  $A$  adalah akar-akar dari polinomial karakteristiknya.

Polinomial karakteristik dari matriks  $A$  ( $p(\lambda)$ ) adalah:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \dots - a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}$$

Untuk memudahkan analisis fungsi ini, diperkenalkan fungsi  $q(\lambda)$ , yaitu:

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n} \quad \dots\dots\dots(\text{II.D.14})$$

Dengan menggunakan fungsi  $q(\lambda)$  maka persamaan karakteristik  $p(\lambda) = 0$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$q(\lambda) = 1 \text{ untuk } \lambda \neq 0 \quad \dots\dots\dots(\text{II.D.15})$$

Karena  $a_i$  dan  $b_i$  semuanya tak negatif, maka  $q(\lambda)$  akan berkurang secara monoton untuk  $\lambda$  yang lebih besar dari nol. Sehingga ada suatu  $\lambda$  yang unik, misalnya  $\lambda_1$ , sehingga  $q(\lambda) = 1$ . Yakni matriks  $A$  mempunyai sebuah nilai eigen positif yang unik. Vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda_1$  adalah

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix}$$

Vektor distribusi umur dari populasi untuk waktu yang lama adalah

$$x^{(k)} \simeq c \lambda_1^k x_1 \quad \text{.....(II.D.16)}$$

Tiga kasus akan muncul sesuai dengan nilai dari nilai eigen yang positif  $\lambda_1$ :

- Populasi pada akhirnya bertambah jika  $\lambda_1 > 1$
- Populasi pada akhirnya akan berkurang jika  $\lambda_1 < 1$
- Populasi itu stabil jika  $\lambda_1 = 1$

$\lambda_1$  ini menentukan suatu populasi yang mempunyai *pertumbuhan sebesar nol (zero population growth)*. Untuk sebarang distribusi umur mula-mula, maka populasi tersebut mendekati sebuah distribusi umur pembatas yang merupakan suatu kelipatan dari vektor eigen  $x_1$ . Dari persamaan (II.D.14) dan (II.D.15) dapat dilihat bahwa  $\lambda_1 = 1$  adalah sebuah nilai eigen jika dan hanya jika

$$a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} = 1 \quad \text{..... (II.D.17)}$$

Pernyataan

$$a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} \quad \text{..... (II.D.18)}$$

dinamakan *laju reproduksi netto (net reproduction rate/NRR)* dari populasi tersebut. Jadi dapat dikatakan bahwa suatu populasi mempunyai

pertumbuhan populasi sebesar nol jika dan hanya jika laju reproduksi netto adalah 1. *NRR* yang didefinisikan oleh persamaan (II.D.18) dapat ditafsirkan sebagai jumlah rata-rata dari anak betina yang dilahirkan oleh seekor betina selama umurnya. (Anton: 1987).

## E. Pemanenan

### Definisi II.E.1:

Pemanenan (*harvesting*) adalah pengambilan hewan dari populasi tersebut. Pemanenan ini tidak berarti “pemotongan hewan”, tetapi hewan tersebut dapat diambil dari populasi itu untuk keperluan lain.

### Definisi II.E.2:

Suatu kebijakan pemanenan pada suatu populasi hewan secara periodik dipanen dikatakan *dapat dibenarkan* jika hasil dari setiap panen adalah sama dan distribusi umur dari populasi yang masih tersisa setelah setiap panen adalah sama. (Anton: 1987)

Pada suatu populasi yang mempunyai suatu distribusi umur khusus, populasi tersebut mengalami periode pertumbuhan yang dijelaskan pada matriks Leslie. Pada akhir periode pertumbuhan tersebut sejumlah bagian tertentu dari setiap kelompok umur akan dipanen sedemikian rupa sehingga populasi yang tidak dipanen mempunyai distribusi umur yang sama seperti populasi awalnya. Siklus ini berulang setelah setiap panen, sehingga hasil tersebut dapat dibenarkan.

Ada beberapa strategi dalam pemanenan yaitu pemanenan yang merata (*uniform harvesting*) dan pemanenan kelompok umur yang termuda saja (*harvesting the youngest class*)

a. Pemanenan Yang Merata (*Uniform Harvesting*)

Strategi pemanenan ini biasanya diterapkan pada populasi liar dengan populasi yang besar seperti ikan, rusa, dan sebagainya. Hewan ini ditangkap secara acak karena akan sukar bagi pemanen untuk membedakan atau menangkap berdasarkan spesifikasi umur.

b. Pemanenan Kelompok Umur Yang Termuda (*Harvesting The Youngest Class*)

Strategi pemanenan ini diterapkan pada populasi yang mudah dalam membedakan atau menangkap berdasarkan spesifikasi umur. Hal ini dapat diterapkan populasi di suatu peternakan. Pada beberapa populasi, ditemukan hanya betina termuda saja yang mempunyai nilai ekonomis, sehingga pemanen hanya menginginkan memanen betina dari kelompok umur yang termuda.

**F. Kambing Peranakan Etawa**

Kambing etawa berasal dari wilayah Jamnapari (India), sehingga kambing ini disebut juga sebagai kambing jamnapari. Kambing ini merupakan kambing yang paling populer di Asia Tenggara. Di negara asalnya, kambing etawa termasuk kambing tipe dwiguna, yakni sebagai penghasil susu dan daging.

Sejak beberapa tahun yang lalu, muncul sentra baru peternakan kambing PE di wilayah Jawa Tengah, yaitu Kecamatan Gumelar, Banyumas. Sentra ini bahkan sudah mulai menjual kambing-kambing PE yang dikembangkannya ke daerah lain seperti Bogor, Sukabumi, Bandung, Lampung, dan Palembang. Perkembangan ini berkat tingginya keinginan atau minat masyarakat serta dukungan pemerintah daerah.

Seekor kambing betina dikatakan dewasa ketika kambing tersebut mengalami siklus *estrus* (birahi) pertama kali. Biasanya terjadi pada kambing-kambing betina yang berumur 8 – 12 bulan. Secara teoritis, kambing betina sudah dapat dikawinkan setelah mengalami masa birahi yang pertama. Namun, untuk memberikan kondisi yang ideal bagi seluruh organ dalam tubuh kambing yang akan menunjang proses kebuntingan, sebaiknya perkawinan dilakukan setelah 3 atau 4 kali siklus birahi (sekitar 11 – 16 bulan). Seekor induk dapat beranak 3 kali dalam 2 tahun dengan jumlah kambing sekelahiran adalah 1 – 2 ekor kambing.

Untuk kambing jantan patokan dewasa kelamin didasarkan pada umur, yaitu pada umur 8 bulan kambing sudah dianggap dewasa. Pejantan sudah bisa digunakan sebagai bibit unggul (*pemacek*) setelah berumur lebih dari satu tahun. Pemeliharaan pejantan tidaklah ekonomis karena kambing jantan tidak beranak dan hanya menambah biaya pemeliharaan. Dalam skala besar pemeliharaan jantan cukup disediakan 10 % dari jumlah betina (perbandingan jumlah betina : jantan adalah 10:1). (Sodiq: 2008)