

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Kemampuan Penalaran Matematis

Istilah kemampuan menurut Poerwodarminto (1976) merupakan kata benda dari kata mampu yang berarti kuasa (bisa, sanggup) melakukan sesuatu, sehingga kemampuan dapat diartikan kesanggupan/kecakapan (sanggup melakukan sesuatu). Menurut Keraf (1992) penalaran adalah proses berpikir yang berusaha menghubungkan-hubungkan fakta-fakta yang diketahui untuk mencapai suatu kesimpulan yang logis. Penalaran memerlukan landasan logika. Penalaran dalam logika bukan suatu proses mengingat-ingat, menghafal, ataupun mengkhayal tetapi merupakan rangkaian proses mencari keterangan lain sebelumnya. Suriasumantri (1999) juga berpendapat sebagai suatu kegiatan berpikir, penalaran mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

1. Adanya suatu pola berpikir yang secara luas dapat disebut logika.

Logika adalah sistem berpikir formal yang didalamnya terdapat seperangkat aturan untuk menarik kesimpulan. Dalam hal ini maka dapat kita katakan bahwa tiap bentuk penalaran mempunyai logikanya sendiri. Atau dapat juga disimpulkan bahwa kegiatan penalaran merupakan suatu proses berpikir logis, sedangkan berpikir logis diartikan sebagai kegiatan berpikir menurut suatu pola tertentu atau menurut logika tertentu.

2. Sifat analitik pada proses berpikirnya penalaran merupakan suatu kegiatan analisis yang mempergunakan logika ilmiah.

Menurut Shurter dan Pierce (dalam Sastrosudirjo (1988) penalaran didefinisikan sebagai proses pencapaian kesimpulan yang logis berdasarkan fakta dan sumber yang relevan. Penalaran adalah proses berpikir yang dilakukan dengan satu cara untuk menarik kesimpulan yang berupa pengetahuan. Kesimpulan yang bersifat umum dapat ditarik dari kasus-kasus yang bersifat individual. Tetapi dapat pula sebaliknya dari hal yang bersifat individual menjadi bersifat umum. Oleh karena itu Thantowi (1993) menyimpulkan bahwa penalaran matematika adalah proses berpikir secara logis dalam menghadapi problema dengan mengikuti ketentuan-ketentuan yang ada dan diakhiri dengan memperoleh kesimpulan.

Fondasi dari matematika adalah penalaran (*reasoning*). Penalaran merupakan salah satu kompetensi dasar dalam matematika disamping pemahaman, pemecahan masalah. Penalaran juga merupakan proses mental dalam mengembangkan pikiran dari beberapa fakta atau prinsip. Penalaran juga dapat berarti proses berfikir yang dilakukan dengan satu cara untuk menarik kesimpulan. Jadi intinya penalaran merupakan suatu kegiatan, suatu proses atau suatu aktifitas untuk berfikir dalam menarik kesimpulan atau suatu pertanyaan yang kebenarannya dibuktikan atau diasumsikan. Shadiq (2004) menyatakan bahwa suatu kegiatan, suatu proses atau suatu aktifitas berpikir untuk menarik kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru yang benar berdasar pada beberapa pernyataan yang kebenarannya merupakan dua

hal yang tidak dapat dipisahkan yaitu materi matematika dipahami melalui penalaran sedangkan penalaran dipahami dan dilatih melalui belajar materi matematika.

Penalaran merupakan suatu bentuk pemikiran atau kejadian dari proses berfikir. Batasan mengenai berpikir (*thinking*) adalah serangkaian aktivitas mental yang banyak macamnya seperti mengingat kembali suatu hal, berkhayal, menghafal, menghitung, menghubungkan beberapa pengertian, menciptakan sesuatu konsep atau memperkirakan berbagai kemungkinan. Jadi dalam hal ini dapat dikatakan bahwa bernalar dan berfikir sangat berbeda, dalam penalaran dapat terjadi salah satu pemikiran, tetapi tidak semua berpikir merupakan penalaran. Soekadijo (1985) membuat kronologi mengenai terjadinya penalaran. Proses berfikir dimulai dari pengamatan indera atau observasi empirik. Proses itu di dalam pikiran menghasilkan sejumlah pengertian dan proposisi sekaligus. Berdasarkan pengamatan-pengamatan indera yang sejenis, pikiran menyusun proposisi yang sejenis pula. Proses inilah yang disebut dengan penalaran yaitu bahwa berdasarkan sejumlah proposisi yang diketahui atau dianggap benar kemudian digunakan untuk menyimpulkan sebuah proposisi baru yang sebelumnya tidak diketahui.

Dilihat dari prosesnya, penalaran terdiri atas penalaran deduktif dan penalaran induktif. Keduanya merupakan argumen dari serangkaian proporsi yang bersifat terstruktur, terdiri dari beberapa premis dan kesimpulan atau konklusi, sedangkan perbedaan keduanya terdapat pada sifat kesimpulan

yang diturunkannya. Berikut penjabaran dari kedua penalaran tersebut menurut Wardhani (2008):

1. Penalaran Induktif

Penalaran induktif yaitu suatu aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru yang bersifat umum (general) berdasarkan pada beberapa pernyataan khusus yang diketahui benar. Pembelajaran diawali dengan memberikan contoh-contoh atau kasus khusus menuju konsep atau generalisasi. Dalam kompetensi dasar tentang memahami berbagai konsep dan prinsip statistika dalam pemecahan masalah nyata. Dalam memahami berbagai konsep dan prinsip statistika, peserta didik dituntun untuk mencermati gambaran awal tentang konsep mean, median dan modus. Mencermati permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan penerapan konsep statistika. Permasalahan sehari-hari itu dapat ditemukan sendiri oleh peserta didik dengan penalaran induktif.

2. Penalaran deduktif

Penalaran deduktif yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan diperoleh sebagai akibat logis dari kebenaran sebelumnya. Jacobs menyatakan bahwa penalaran deduktif adalah suatu cara penarikan kesimpulan dari pernyataan atau fakta-fakta yang dianggap benar dengan menggunakan logika. Jadi proses pembuktian secara deduktif akan melibatkan teori atau rumus matematika lainnya yang sebelumnya sudah dibuktikan kebenarannya secara deduktif juga. Peserta didik sering

mengalami kesulitan memahami makna matematika dalam pembelajaran dengan pendekatan deduktif. Hal ini disebabkan peserta didik baru memahami konsep atau generalisasi setelah disajikan berbagai contoh.

Dijelaskan oleh Wardhani (2008) tentang indikator-indikator penalaran yang harus dicapai siswa yang merujuk pada indikator penalaran antara lain:

1. Mengajukan dugaan
2. Melakukan manipulasi matematika
3. Menarik kesimpulan, menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi
4. Menarik kesimpulan dari pernyataan
5. Memeriksa kesahihan suatu argumen
6. Menentukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi

Berdasarkan beberapa definisi mengenai kemampuan penalaran matematis di atas maka peneliti menetapkan definisi kemampuan penalaran matematis pada penelitian ini sebagai kemampuan siswa untuk merumuskan kesimpulan atau pernyataan baru berdasarkan pada beberapa pernyataan yang kebenarannya telah dibuktikan atau diasumsikan sebelumnya, yang ditandai dengan enam indikator sebagai berikut:

a. Mengajukan dugaan

Kemampuan siswa mencari atau menemukan beberapa alternatif cara penyelesaian suatu soal yang berbeda sehingga mendapatkan hasil yang

berbeda, meskipun terkadang hasil dari penyelesaian yang didapatkan sama.

Contoh:

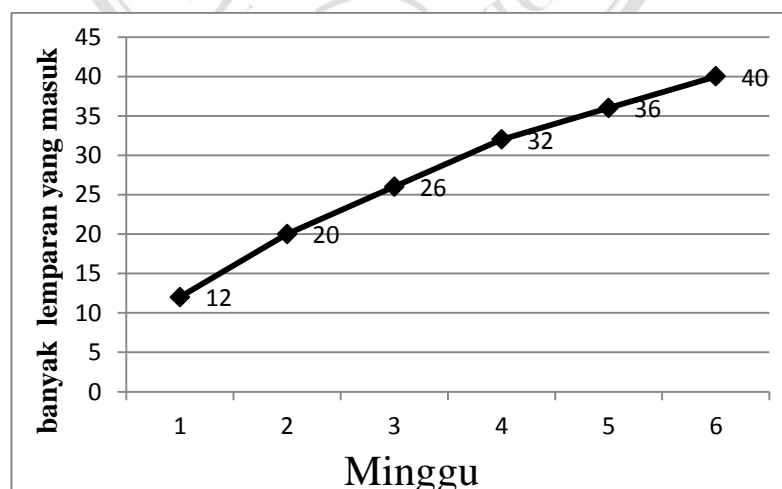
Setiap hari David berlatih memasukkan bola ke keranjang basket untuk latihan bola basket. Setiap akhir minggu ia melakukan 50 kali lemparan dan selalu mencatat hasil lemparan yang berhasil masuk ke keranjang sebagai berikut:

Minggu	1	2	3	4	5	6	7
Banyak lemparan yang masuk	12	20	26	32	40	45	48

Dapatkah kamu menafsirkan berapa banyak lemparan David yang berhasil masuk ke dalam keranjang pada $4\frac{1}{2}$ minggu? Berapakah banyak lemparannya?

Penyelesaiannya:

Diketahui:



Banyaknya lemparan minggu ke4 = 32 lemparan

Banyaknya lemparan minggu ke5 = 36 lemparan

Penambahan lemparan pada minggu ke 4- ke5 = $36 - 32 = 4$ lemparan

Ditanyakan :

Banyaknya lemparan pada minggu ke $4\frac{1}{2}$

Jawab:

Lemparan pada minggu ke $4\frac{1}{2}$ = lemparan minggu ke 4 + lemparan

minggu ke $\frac{1}{2}$ dari minggu ke 4 –
minggu ke 5



Lemparan	Minggu
8	1
x	$\frac{1}{2}$

$$\rightarrow \frac{4}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow x = 8 \times \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x = 4 \text{ lemparan}$$

Lemparan pada minggu ke $4\frac{1}{2}$ = lemparan minggu ke 4 + lemparan

minggu $\frac{1}{2}$ dari minggu ke 4 –
minggu ke 5

$$= 32 \text{ lemparan} + 4 \text{ lemparan}$$

$$= 36 \text{ lemparan}$$

Jadi lemparan pada minggu ke $4\frac{1}{2}$ menghasilkan 36 lemparan.

b. Melakukan manipulasi matematika

Merupakan kemampuan siswa untuk mencari hubungan antara fakta, konsep, dan prinsip untuk menyelesaikan suatu masalah matematika dan menuju kepada suatu kesimpulan.

Contoh:

Tinggi yang dicapai seorang atlit loncat tinggi dalam enam kali lompatan adalah 2,05 m; 2,10 m; 1,95 m; 1,85 m; 2,20 m; dan 2,15m. Berapakah rata-rata tinggi lompatan yang dicapai atlit tersebut?

Penyelesaiannya:

Diketahui:

Banyak lompatan= 6 kali, maka $n= 6$

Nilai= x , maka $x_1= 2,05$; $x_2 = 2,10$; $x_3 = 1,95$; $x_4 = 1,85$; $x_5=2,20$;
 $x_6 = 2,15$

Ditanyakan:

Rata-rata tinggi lompatan yang dicapai atlit tersebut

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Tinggi rata-rata lompatan (mean)} &= \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{n} \\ &= \frac{2,05 + 2,10 + 1,95+1,85+2,20+2,15}{6} \\ &= \frac{12,30}{6} \\ &= 2,05 \text{ m} \end{aligned}$$

Jadi tinggi rata-rata lompatan atlit tersebut adalah 2,05 m

c. Menarik kesimpulan dari pernyataan

Kemampuan siswa untuk membuat suatu pernyataan baru yang benar berdasarkan pada beberapa pernyataan yang kebenarannya telah dibuktikan atau diasumsikan sebelumnya melalui manipulasi matematika

Contoh:

Di bawah ini merupakan tabel pertumbuhan penduduk di Propinsi Jawa Tengah dari tahun 1970 sampai 2000

Tahun	1970	1980	1990	2000
Jumlah penduduk (dalam juta)	3a	3a + 4	4a	4a + 3

Jika rata-rata jumlah penduduk di Propinsi Jawa Tengah dari tahun 1970 sampai tahun 2000 adalah 3,5 juta jiwa. Buatlah diagram garis dari data diatas dan apa yang dapat disimpulkan dari kumpulan data itu?

Penyelesaiannya:

Diketahui:

$$x = 2,625 \text{ jiwa}$$

Ditanyakan:

Diagram garis dan kesimpulannya

Jawab:

$$\Leftrightarrow x = \frac{\text{jumlah nilai data}}{\text{banyaknya data}}$$

$$3,5 = \frac{3a + 3a+4 + 4a + (4a+3)}{30}$$

$$3,5 = \frac{3a+3a+4+4a+4a+3}{30}$$

$$3,5 = \frac{14a+7}{30}$$

$$105 = 14a + 7$$

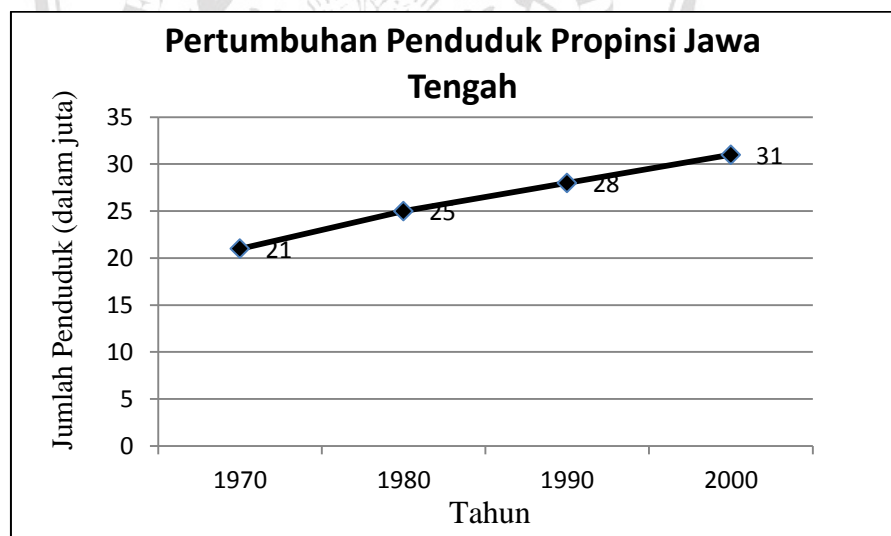
$$14a = 105 - 7$$

$$14a = 98$$

$$a = 7 \text{ juta}$$

Tahun	1970	1980	1990	2000
Jumlah penduduk (dalam juta)	$3a=3 \cdot 7=21$	$3a + 4=3 \cdot 7+4=25$	$4a=4 \cdot 7=28$	$4a + 3=4 \cdot 7 + 3=31$

Diagram garis



Jadi dari diagram di atas dapat disimpulkan bahwa pertumbuhan penduduk setiap sepuluh tahunnya mengalami kenaikan.

d. Menyusun bukti dan memberikan alasan terhadap kebenaran solusi

Kemampuan siswa memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi, yang kemudian bukti tersebut dijelaskan dengan menggunakan model yang berupa gambar, diagram atau grafik.

Contoh:

Tabel di bawah ini menunjukkan nilai Bahasa Inggris dari 20 siswa.

Nilai	Frekuensi
40	2
45	8
50	1
55	2
60	4
65	2
70	1

Buktikanlah bahwa banyaknya siswa yang mendapat nilai di bawah rata-rata ada 11 anak!

Penyelesaiannya:

Diketahui:

Nilai	Frekuensi	Nilai x Frekuensi
40	2	80
45	8	360
50	1	50
55	2	110
60	4	240
65	2	130
70	1	70
Jumlah	20	1040

Ditanyakan:

Membuktikan banyaknya siswa yang mendapat nilai di bawah rata-rata ada 11 anak

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Rata-rata} &= \frac{\text{jumlah}(\text{nilai} \times \text{frekuensi})}{\text{jumlah frekuensi}} \\ &= \frac{1040}{20} = 52 \end{aligned}$$

Nilai siswa di bawah rata-rata 50 ada 1 siswa, 45 ada 8 siswa, dan 40 ada 2 siswa. Banyaknya siswa yang mendapat nilai di bawah rata-rata ada $1+8+2 = 11$. Jadi terbukti benar bahwa siswa yang mendapat nilai di bawah rata-rata ada 11 anak.

e. Memeriksa kesahihan suatu argumen

Kemampuan siswa dalam menjawab soal dengan jawaban yang benar sesuai dengan langkah-langkah matematika atau dengan kata lain, ketika siswa mampu melakukan perhitungan matematika secara benar dan lengkap maka salah satu indikator kemampuan penalaran matematika siswa yaitu memeriksa kesahihan suatu argumen sudah tercapai.

Contoh:

Berikut adalah data nilai-nilai ulangan harian kelas VIII C pada ulangan ke-1 dan ke-2.

Data nilai ulangan harian ke-1

60 55 55 80 75 65 65 70 50 45

45 45 65 70 45 80 45 75 45 75

70 65 45 50 70 45 80 75 45 45

Data nilai ulangan harian ke-2

50 80 30 30 60 70 100 50 40 40

60 60 40 70 30 60 50 80 30 70

30 60 40 70 60 90 50 80 60 50

Dari data nilai ulangan harian di atas selidikilah apakah mean pada ulangan harian ke-1 sama dengan median ulangan harian ke-2!

Penyelesaiannya:

Diketahui:

Data ulangan harian ke-1

Nilai	Frekuensi	Nilai x Frekuensi
45	10	450
50	2	100
55	2	110
60	1	60
65	4	260
70	4	280
75	4	300
80	3	240
Jumlah:	30	1800

Data ulangan harian ke-2

Nilai	Frekuensi	Nilai ke-
30	5	1 – 5
40	4	6 – 9
50	5	10 – 14
60	7	15 – 21
70	4	22 – 25
80	3	26 – 28
90	1	29
100	1	30

Ditanyakan:

Apakah mean ulangan harian ke-1 = median ulangan harian ke-2

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Mean ulangan harian ke-1} &= \frac{\text{jumlah}(\text{frekuensi} \times \text{nilai})}{\text{jumlah frekuensi}} \\ &= \frac{1800}{30} \\ &= 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Median ulangan harian ke-2} &= \text{nilai ke } \frac{30+1}{2} \\ &= \text{nilai ke } 15\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nilai ke- $15\frac{1}{2}$ artinya pertengahan nilai ke-15 dan ke-16

Nilai ke-15 = 60 (lihat tabel frekuensi ulangan harian ke-2)

Nilai ke-16 = 60 (lihat tabel frekuensi ulangan harian ke-2)

$$\text{Median} = \frac{60 + 60}{2} = 60$$

Mean ulangan harian ke-1 = median ulangan harian ke-2

$$60 = 60$$

Jadi benar kalau mean ulangan harian ke-1 sama dengan median ulangan ke-2 yaitu 60

- f. Menemukan suatu pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi

Kemampuan siswa dalam melakukan pembuktian jawaban yang diperoleh dari soal-soal yang diberikan sehingga dapat menarik kesimpulan bersifat umum atau disebut penalaran induktif. Dalam

penalaran induktif terdapat proses generalisasi atau analogi, dimana kita ketahui bahwa generalisasi adalah proses penalaran yang mengandalkan beberapa pertanyaan yang mempunyai sifat tertentu untuk mendapatkan kesimpulan yang bersifat umum.

Contoh:

Peserta ujian matematika terdiri dari 40 orang siswa kelas A, 30 orang siswa kelas B, dan 30 orang siswa kelas C. Nilai rata-rata siswa kelas A adalah 7,5 dan nilai rata-rata siswa kelas B dan C adalah $6+n$. Hitunglah rata-rata seluruh siswa kelas A, B dan C tersebut!

Penyelesaiannya:

Diketahui:

Peserta ujian kelas A = 40 siswa

Kelas B = 30 siswa

Kelas C = 30 siswa

Jumlah siswa keseluruhan = 100

Rata-rata kelas B dan C = $6+n$

Rata-rata kelas A = 7,5

Jumlah nilai siswa keseluruhan = $40 \times 7,5 + (30 + 30) \times (6+n)$

$$= 300 + 60(6+n)$$

$$= 300 + 300 + 60n$$

$$= 600 + 60n$$

Ditanyakan:

Rata-rata seluruh siswa kelas A,B dan C

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Rata-rata keseluruhan} &= \frac{\text{jumlah nilai siswa keseluruhan}}{\text{jumlah siswa keeluruhan}} \\ &= \frac{600+60n}{100} \\ &= 6 + \frac{3}{5}n \end{aligned}$$

Jadi rata-rata seluruh siswa kelas A, B, dan C adalah $6 + \frac{3}{5}n$

B. Pokok Bahasan Statistika

Sesuai dengan silabus pelajaran matematika untuk SMP/MTs kurikulum 2013, materi Statistika adalah salah satu pokok bahasan matematika SMP kelas VIII semester 1. Pada pokok bahasan ini, memuat Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar sebagai berikut:

Kompetensi Inti:

- KI 1 :Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya
- KI 2 :Menghargai dan menghayati perilaku jujur, disiplin, tanggungjawab, peduli (toleransi, gotong royong), santun, percaya diri dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam dalam jangkauan pergaulan dan keberadaannya
- KI 3 :Memahami dan menerapkan pengetahuan (faktual, konseptual dan prosedural) berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya terkait fenomena dan kejadian tampak mata

KI 4 :Mengolah, menyaji, dan menalar dalam ranah konkret (menggunakan, mengurai, merangkai, memodifikasi, dan membuat) dan ranah abstrak (menulis, membaca, menghitung, menggambar, dan mengarang) sesuai dengan yang dipelajari di sekolah dan sumber lain yang sama dalam sudut pandang/teori

Kompetensi Dasar dan Indikator:

13.1 Data Statistika

13.1.1 Pengertian Data

13.1.2 Pengumpulan Data

13.2 Penyajian Data Statistika

13.2.1 Penyajian Data dalam Bentuk Diagram

13.2.2 Penyajian Data dalam Daftar Frekuensi

13.3 Ukuran Pemusatan

13.3.1 Rata-Rata Hitung(Mean)

13.3.2 Modus

13.3.3 Median

13.3.4 Median Data pada Daftar Frekuensi