

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Aljabar Max-Plus

Himpunan bilangan riil (\mathbb{R}) dengan diberikan operasi max dan plus dengan mengikuti definisi berikut :

Definisi II.A.1:

Didefinisikan $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$ dan $e \stackrel{\text{def}}{=} 0$, dan untuk himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dinotasikan dengan \mathbb{R}_{max} , untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{max}$, didefinisikan operasi \oplus dan \otimes dengan:

$$a \oplus b \stackrel{\text{def}}{=} \max(a, b) \quad \text{dan} \quad a \otimes b \stackrel{\text{def}}{=} a + b$$

Untuk setiap \mathbb{R}_{max} dengan operasi \oplus dan \otimes dinamakan *aljabar max-plus* dan dinotasikan dengan:

$$(\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes).$$

(Heidergott,2006:2)

Dan untuk operasi a dengan $-\infty$, maka $\max(a, -\infty) = \max(-\infty, a) = a$ dan $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}_{max}$, sehingga didapat:

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a \quad \text{dan} \quad a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon \quad (2.1)$$

Contoh II.A.1:

1. $5 \oplus 2 = \max(5,2) = 5$

2. $5 \oplus \varepsilon = \max(5, -\infty) = 5$
3. $5 \otimes \varepsilon = 5 + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$
4. $e \oplus 2 = \max(0, 2) = 2$
5. $5 \otimes 2 = 5 + 2 = 7$

1. Sifat-sifat Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

a. Bersifat asosiatif:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max} : x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z, \text{ dan}$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max} : x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \text{i. } x \oplus (y \oplus z) &= \max(x, \max(y, z)) \\ &= \max(x, y, z) \\ &= \max(\max(x, y), z) \\ &= (x \oplus y) \oplus z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } x \otimes (y \otimes z) &= x + (y + z) \\ &= x + y + z \\ &= (x + y) + z \\ &= (x \otimes y) \otimes z. \end{aligned}$$

Contoh II.A.2:

$$1. 3 \oplus (7 \oplus \varepsilon) = (3 \oplus 7) \oplus \varepsilon$$

- $3 \oplus (7 \oplus \varepsilon) = \max(3, \max(7, (-\infty))) = \max(3, 7) = 7$

- $(3 \oplus 7) \oplus \varepsilon = \max(\max(3,7), (-\infty)) = \max(7, (-\infty)) = 7$

2. $5 \otimes (\varepsilon \otimes 2) = (5 \otimes \varepsilon) \otimes 2$

- $5 \otimes (\varepsilon \otimes 2) = 5 + (-\infty + 2) = 5 + (-\infty) = -\infty$

- $(5 \otimes \varepsilon) \otimes 2 = (5 + (-\infty)) + 2 = -\infty + 2 = -\infty$

b. Bersifat komutatif:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max} : x \oplus y = y \oplus x, \text{ dan}$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max} : x \otimes y = y \otimes x.$$

Bukti:

i. $x \oplus y = \max(x, y) = \max(y, x) = y \oplus x.$

ii. $x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x.$

Contoh II.A.3:

1. $-2 \oplus 23 = 23 \oplus (-2)$

- $-2 \oplus 23 = \max(-2, 23) = 23$

- $23 \oplus (-2) = \max(23, -2) = 23$

2. $4 \otimes (-9) = -9 \otimes 4$

- $4 \otimes (-9) = 4 + (-9) = -5$

- $-9 \otimes 4 = -9 + 4 = -5$

c. Mempunyai elemen identitas pada operasi pertama (\oplus) (elemen nol):

$$\forall x \in \mathbb{R}_{max} : x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x.$$

Bukti:

$$i. \quad x \oplus \varepsilon = \max(x, (-\infty)) = \max(-\infty, x) = \varepsilon \oplus x = x.$$

Contoh II.A.4:

$$1. \quad 7 \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus 7$$

- $7 \oplus \varepsilon = \max(7, (-\infty)) = 7$
- $\varepsilon \oplus 7 = \max(-\infty, 7) = 7$

d. Mempunyai elemen identitas pada operasi kedua (\otimes) (elemen unit):

$$\forall x \in \mathbb{R}_{max} : x \otimes e = e \otimes x = x.$$

Bukti:

$$i. \quad x \otimes e = x + 0 = 0 + x = e \otimes x = x.$$

Contoh II.A.5:

$$1. \quad 9 \otimes e = e \otimes 9$$

- $9 \otimes e = 9 + 0 = 9$
- $e \otimes 9 = 0 + 9 = 9$

e. Bersifat distributif :

Distributif kiri:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max} : x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z).$$

Distributif kanan:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max} : (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z).$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \text{i. } x \otimes (y \oplus z) &= x + \max(y, z) = \max(x + y, x + z) = \\ &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } (x \oplus y) \otimes z &= \max(x, y) + z = \max(x + z, y + z) = \\ &= (x \otimes z) \oplus (y \otimes z). \end{aligned}$$

Contoh II.A.6:

$$1. \quad 5 \otimes (4 \oplus e) = (5 \otimes 4) \oplus (5 \otimes e)$$

- $5 \otimes (4 \oplus e) = 5 + \max(4, 0) = 5 + 4 = 9$
- $(5 \otimes 4) \oplus (5 \otimes e) = \max(5 + 4, 5 + 0) = \max(9, 5) = 9$

$$2. \quad (4 \oplus \varepsilon) \otimes 3 = (4 \otimes 3) \oplus (\varepsilon \otimes 3)$$

- $(4 \oplus \varepsilon) \otimes 3 = \max(4, (-\infty)) + 3 = 4 + 3 = 7$
- $(4 \otimes 3) \oplus (\varepsilon \otimes 3) = \max(4 + 3, (-\infty) + 3) = \max(7, (-\infty)) = 7$

f. Mempunyai elemen pembuat nol untuk operasi kedua (\otimes):

$$\forall x \in \mathbb{R}_{max} : x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon.$$

Bukti:

$$\text{i. } x \otimes \varepsilon = x + (-\infty) = -\infty + x = \varepsilon \otimes x = \varepsilon.$$

Contoh II.A.7:

1. $5 \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes 5$

- $5 \otimes \varepsilon = 5 + (-\infty) = -\infty$
- $\varepsilon \otimes 5 = -\infty + 5 = -\infty$

g. Idempoten pada operasi pertama (\oplus):

$$\forall x \in \mathbb{R}_{max} : x \oplus x = x.$$

Bukti:

i. $x \oplus x = \max(x, x) = x.$

Contoh II.A.8:

1. $7 \oplus 7 = \max(7, 7) = 7$

Dengan sifat-sifat operasi pada bilangan riil maka didefinisikan operasi pangkat pada aljabar max-plus yaitu sebagai berikut:

Definisi II.A.2:Untuk setiap $x \in \mathbb{R}_{max}$, maka:

1. $x^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{x \otimes x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{n \text{ kali}} = \underbrace{x + x + x + \dots + x}_{n \text{ kali}} = n \times x, \quad \text{untuk}$

setiap $n \in \mathbb{R}$ dengan $n \neq 0$,

2. $x^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} e = 0, \text{ untuk } n = 0.$

(Heidergott,2006:2)

Contoh II.A.9:

1. $5^{\otimes 6} = 6 \times 5 = 30$

2. $2^{\otimes 6} = 6 \times 2 = 12$

3. $3^{\otimes 0} = 0$

4. $0^{\otimes 6} = 6 \times 0 = 0$

5. $12^{\otimes \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times 12 = 3$

6. $12^{\otimes -\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \times 12 = -3 = 3^{\otimes -1}$

Sebuah himpunan tak kosong \mathbb{R}_{max} dengan diberikan operasi \oplus dan \otimes , maka diperoleh definisi sebagai berikut:

Definisi II.A.3:

\mathbb{R}_{max} sebuah semi ring, jika:

1. $(\mathbb{R}_{max}, \oplus)$ mempunyai sifat asosiatif dan komutatif dengan elemen nol.
2. $(\mathbb{R}_{max}, \otimes)$ mempunyai sifat asosiatif, distributif terhadap operasi \oplus (distributif kanan dan distributif kiri) dan memiliki elemen unit.
3. Mempunyai elemen pembuat nol pada operasi \otimes .

Jika \mathbb{R}_{max} terhadap operasi \otimes komutatif, maka \mathbb{R}_{max} disebut semi ring yang komutatif dan jika terhadap operasi \oplus adalah idempoten yaitu jika berlaku $a \oplus a = a, \forall a \in \mathbb{R}_{max}$, maka \mathbb{R}_{max} disebut semi ring idempoten.

(Heidergott, 2006:4)

Aljabar max-plus $(\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes)$ adalah sebuah contoh dari semi ring yang komutatif dan idempoten. Contoh semiring yang komutatif dan idempoten yang lain yaitu: Aljabar min-plus yang didefinisikan dengan $(\mathbb{R}_{min}, \oplus', \otimes)$, dimana $\mathbb{R}_{min} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon'\}$, dengan $a \oplus' b \stackrel{\text{def}}{=} \min\{a, b\}$ untuk semua $a, b \in \mathbb{R}_{min}$, dan $\varepsilon' \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$.

B. Sistem Interval pada Aljabar Max-Plus

1. Matriks dan vektor

Matriks $m \times n$ pada aljabar max-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$, dan untuk $m, n \in \mathbb{N}$. Elemen dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ pada baris i dan kolom j dilambangkan dengan a_{ij} dan bisa juga dengan $[A]_{ij}$, dengan $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$, dengan $\underline{m} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, \dots, m\}$ dan $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

a) Sifat-sifat operasi max (\oplus) dan plus (\otimes) pada matriks

Apabila diketahui $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$, $M \in \mathbb{R}_{max}^{m \times l}$, $N \in \mathbb{R}_{max}^{l \times n}$, dan $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$, dengan α adalah skalar, maka:

$$1) A \oplus B = [A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}, \text{ dengan } i \in \underline{m} \text{ dan } j \in \underline{n} \quad (2.2)$$

$$2) A \oplus B = B \oplus A$$

$$3) \alpha \otimes A = [\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij} = \alpha + a_{ij}, \text{ dengan } i \in \underline{m} \text{ dan } j \in \underline{n}.$$

$$4) M \otimes N = [M \otimes N]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l m_{ij} \otimes n_{jk} = \max\{m_{ij} + n_{jk}\}$$

$$\text{dengan } i \in \underline{m} \text{ dan } k \in \underline{n}. \quad (2.3)$$

Contoh II.B.1:

Diberikan dua buah matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

maka nilai $A \oplus B$ dapat ditemukan dengan cara mencari elemen-elemen dari $A \oplus B$ yaitu sebagai berikut:

$$[A \oplus B]_{11} = e \oplus -2 = \max\{0, -2\} = 0$$

$$[A \oplus B]_{12} = \varepsilon \oplus 4 = \max\{-\infty, 4\} = 4$$

$$[A \oplus B]_{21} = 2 \oplus 1 = \max\{2, 1\} = 2$$

dan

$$[A \oplus B]_{22} = 5 \oplus \varepsilon = \max\{5, -\infty\} = 5$$

sehingga didapat:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Dan nilai $B \oplus A$ dapat ditemukan dengan cara mencari elemen-elemen dari $B \oplus A$ yaitu sebagai berikut:

$$[B \oplus A]_{11} = -2 \oplus e = \max\{-2, 0\} = 0$$

$$[B \oplus A]_{12} = 4 \oplus \varepsilon = \max\{4, -\infty\} = 4$$

$$[B \oplus A]_{21} = 1 \oplus 2 = \max\{1, 2\} = 2$$

dan

$$[B \oplus A]_{22} = \varepsilon \oplus 5 = \max\{-\infty, 5\} = 5$$

sehingga didapat:

$$B \oplus A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Contoh II.B.2:

Diberikan dua buah matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

maka $A \otimes B$ ditemukan dengan cara mencari nilai elemen-elemen

$A \otimes B$ yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} [A \otimes B]_{11} &= e \otimes (-1) \oplus \varepsilon \otimes 1 = \max\{(-1, -\infty + 1)\} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A \otimes B]_{12} &= e \otimes 11 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon = \max\{(0 + 11, -\infty - \infty)\} \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$[A \otimes B]_{21} = 3 \otimes (-1) \oplus 2 \otimes 1 = \max\{(3 - 1, 2 + 1)\} = 3$$

dan

$$[A \otimes B]_{22} = 3 \otimes 11 \oplus 2 \otimes \varepsilon = \max\{(3 + 11, 2 - \infty)\} = 14$$

sehingga didapat:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$$

Dan nilai $B \otimes A$ ditemukan dengan cara mencari nilai elemen-elemen $B \otimes A$ yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} [B \otimes A]_{11} &= -1 \otimes e \oplus 11 \otimes 3 = \max\{(-1 + 0, 11 + 3)\} \\ &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [B \otimes A]_{12} &= -1 \otimes \varepsilon \oplus 11 \otimes 2 = \max\{(-1 + (-\infty), 11 + 2)\} \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$[B \otimes A]_{21} = 1 \otimes e \oplus \varepsilon \otimes 2 = \max\{(1 + 0, -\infty + 2)\} = 2$$

dan

$$\begin{aligned}
 [B \otimes A]_{22} &= 1 \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes 2 = \max\{1 + (-\infty), -\infty + 2\} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

sehingga didapat:

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 2 & -\infty \end{pmatrix}$$

untuk operasi \otimes tidak bersifat komutatif karena $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Definisi II.A.4:

$\varepsilon(m, n)$ adalah matriks $m \times n$ dengan semua elemennya ε , dan $E(m, n)$ adalah matriks $m \times n$ dengan definisi sebagai berikut:

$$[E(m, n)]_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e & \text{untuk } i = j \\ \varepsilon & \text{untuk } i \text{ yang lain} \end{cases}$$

Jika $m = n$, maka $E(n, n)$ disebut sebagai matriks identitas $n \times n$.

(Heidergott, 2006:6)

$\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ terhadap operasi \oplus mempunyai sifat asosiatif, mempunyai elemen nol ($\varepsilon(m, n)$) dan bersifat idempoten. $\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ terhadap operasi \otimes mempunyai sifat asosiatif, distributif terhadap operasi \oplus , mempunyai elemen unit $E(m, n)$ dan $\varepsilon(m, n)$ elemen pembuat nol untuk operasi \otimes .

Transpose $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dinotasikan dengan A^T dan definisinya sama dengan transpose pada matriks biasa. Elemen-elemen dari $\mathbb{R}_{max}^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_{max}^{n \times 1}$ disebut sebagai vektor. Elemen ke j dari vektor \mathbb{R}_{max}^n dinotasikan dengan x_j , yang selanjutnya ditulis dengan $[x]_j$. Vektor pada \mathbb{R}_{max}^n dengan semua elemennya e disebut vektor unit dan dinotasikan dengan \mathbf{u} , dengan $[\mathbf{u}]_j = e$ untuk $j \in \underline{n}$.

Sebuah matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$, apabila dipangkatkan dengan $k \in \mathbb{N}$ dapat dicari nilainya dengan mengikuti definisi sebagai berikut:

Definisi II.A.5:

Setiap $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$, maka A pangkat k ($A^{\otimes k}$) didefinisikan dengan:

$$A^{\otimes k} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{n \text{ kali}} \quad (2.4)$$

untuk $k \in \mathbb{N}$ dengan $k \neq 0$, dan $A^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} E(n, n)$. (Heidertott, 2006:7)

2. Sistem Interval pada Aljabar Max-Plus

Matriks-matriks dalam aljabar max-plus ($A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$), vektor ($x \in \mathbb{R}_{max}^n$), maka $[A \otimes x]_i = \max\{a_{ij} + x_j\}$. Dan untuk setiap $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dan $x, y \in \mathbb{R}_{max}^n$, maka:

1. $A \leq B$, jika $a_{ij} \leq b_{ij}$ untuk semua $i \in \underline{m}, j \in \underline{n}$.
2. $x \leq y$, jika $x_j \leq y_j$ untuk semua $j \in \underline{n}$
3. $A \leq B$ dan $x \leq y$, maka $A \otimes x \leq B \otimes y$ disebut sebagai monotonisitas dari operasi \otimes .

Contoh II.B.2:

Diberikan dua buah matriks yaitu $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ dan dua

buah vektor yaitu $x = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$, maka didapat:

$$A \otimes x \leq B \otimes y$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \varepsilon \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max\{-\infty + (-\infty), -\infty + 5\} \\ \max\{7 + (-\infty), 5 + 5\} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \max\{-\infty, -\infty\} \\ \max\{-\infty, 5\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\infty \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} \dots\dots (i)$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max\{5 + 10, 1 + 7\} \\ \max\{9 + 10, 6 + 7\} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \max\{15, 8\} \\ \max\{19, 13\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 19 \end{pmatrix} \dots\dots (ii)$$

Jadi, dari (i) dan (ii) didapat $\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 15 \\ 19 \end{pmatrix}$.

Definisi II.B.1:

Sebuah matriks interval didefinisikan $A = [A, \bar{A}]$ dengan $A, \bar{A} \in$

$\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$, $A \leq \bar{A}$, sedangkan vektor interval $b = [b, \bar{b}]$ dengan $b, \bar{b} \in$

\mathbb{R}_{max}^m , $b \leq \bar{b}$, dan dinotasikan dengan:

$$A \otimes x = b, \tag{2.5}$$

Bentuk (2.5) disebut sebagai sistem interval pada aljabar max-plus.

(Zimmermann, 2005:185)

Jika $A = \bar{A}$ maka sistem intervalnya disebut sistem interval dengan matriks konstan dan jika $b = \bar{b}$ maka disebut sistem interval dengan sisi kanan konstan.

Definisi II.B.2:

Peran penting dari penyelesaian $A \otimes x \leq b$ disebut solusi prinsipal. Dan didefinisikan sebagai berikut:

$$x^*(A, b) = \min_{i \in m} \{b_i - a_{ij}\}, \text{ untuk setiap } j \in N. \quad (2.6)$$

(Zimmerman, 2005:179)

Lemma II.B.1 Diberikan $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dan $b \in \mathbb{R}_{max}^m$, maka:

- i) jika $A \otimes x \leq b$ dengan $x \in \mathbb{R}_{max}^n$, maka $x \leq x^*(A, b)$
- ii) $A \otimes x^*(A, b) \leq b$.

Lemma II.B.2 Diberikan A^1, A^2 adalah dua matriks pada $\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dan b^1, b^2 adalah vektor yang bersesuaian. Maka didapat sebuah sistem pertidaksamaan pada \mathbb{R} sebagai berikut:

$$A^1 \otimes x \leq b^1 \quad (2.7)$$

$$A^2 \otimes x \geq b^2 \quad (2.8)$$

mempunyai solusi jika dan hanya jika solusi prinsipal $x^*(A^1, b^1)$ memenuhi (2.8).

C. Konsep Penyelesaian untuk Sistem Interval pada Aljabar Max-Plus

Dalam menyelesaikan sebuah sistem interval maka harus dipertimbangkan dan didasarkan pada konsep penyelesaian sebuah subsistemnya. Konsep penyelesaian dari sistem interval dalam aljabar max-

plus terdiri dari tiga jenis penyelesaian. Berikut ini adalah tiga jenis penyelesaian untuk sistem interval pada aljabar max-plus:

1. Penyelesaian Kuat

Sebuah sistem interval mempunyai penyelesaian kuat jika elemen dari vektor x pada sistem intervalnya merupakan penyelesaian kuat. Dan jika sebuah sistem interval mempunyai penyelesaian kuat maka apabila sistem interval tersebut digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan nyata maka sudah tidak terdapat kesalahan.

2. Penyelesaian Toleran

Sebuah sistem interval mempunyai penyelesaian toleran jika elemen dari vektor x pada sistem intervalnya merupakan penyelesaian toleran. Dan jika sebuah sistem interval mempunyai penyelesaian toleran maka sistem interval tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan nyata dengan kemungkinan munculnya kesalahan sangat kecil sekali atau dengan kata lain sistem intervalnya dapat digunakan sebagai penyelesaian dan dapat juga tidak digunakan untuk penyelesaian.

3. Penyelesaian Lemah

Sebuah sistem interval mempunyai penyelesaian lemah jika elemen dari vektor x pada sistem intervalnya merupakan penyelesaian

lemah. Dan jika sebuah sistem interval mempunyai penyelesaian lemah maka sistem interval tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan nyata dengan kemungkinan masih terdapat beberapa kesalahan. Dan disarankan untuk mengubah elemen-elemen dari vektor intervalnya.

